
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2026 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: Parte obligatoria (Ej. 1 y Ej. 2) + Bloque 1 optativo (Ej. 3.1 ó 3.2) + Bloque 2 optativo (Ej. 4.1 ó 4.2). Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

PARTE OBLIGATORIA · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Una ventana tiene forma de rectángulo y está coronada por un semicírculo. Sabiendo que el perímetro de la ventana mide 8 metros, halla las dimensiones de la ventana que permitan la mayor entrada de luz.

Resolución

Variables: sea x el ancho del rectángulo (diámetro del semicírculo) y h la altura del rectángulo.

Perímetro: dos lados verticales + base + arco semicircular:

$$2h + x + \frac{\pi x}{2} = 8 \Rightarrow h = 4 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}$$

Área total (rectángulo + semicírculo):

$$A(x) = xh + \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x \left(4 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8} = 4x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8}$$

Maximizamos:

$$A'(x) = 4 - x - \frac{\pi x}{4} = 0 \Rightarrow 4 = x \cdot \frac{4 + \pi}{4} \Rightarrow x = \frac{16}{4 + \pi}$$

$$A''(x) = -1 - \frac{\pi}{4} < 0 \quad \checkmark \text{ (máximo)}$$

$$h = 4 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4} = 4 - x \cdot \frac{4 + \pi}{8} \cdot 2 = 4 - \frac{16}{4 + \pi} \cdot \frac{4 + \pi}{8} = 4 - 2 = \frac{8}{4 + \pi}$$

Observamos que $h = \frac{x}{2}$, es decir la altura del rectángulo coincide con el radio del semicírculo.

$$\checkmark \text{ Ancho: } x = \frac{16}{4 + \pi} \approx 2,24 \text{ m.} \quad \text{Altura: } h = \frac{8}{4 + \pi} \approx 1,12 \text{ m.}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar que el perímetro incluye los dos lados verticales, la base y el arco semicircular $\frac{\pi x}{2}$, pero **no** la base del semicírculo, que coincide con el lado superior del rectángulo.

PARTE OBLIGATORIA · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Considera los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(2, m, 1)$, $C(3, 4, 2)$ y $D(1, -1, m)$.

a) [1 punto] Halla los valores de m para los cuales los puntos anteriores son coplanarios.

b) [1,5 puntos] Para $m = 1$, calcula el área del triángulo de vértices A , B , C y el volumen del tetraedro de vértices A , B , C , D .

Resolución**Apartado a)**

Los cuatro puntos son coplanarios si y solo si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$:

$$\overrightarrow{AB} = (1, m-2, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (2, 2, 2) \quad \overrightarrow{AD} = (0, -3, m)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m-2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & m \end{vmatrix} = 2m + 6 - (m-2)(2m) - 6 = 6m - 2m^2 = 2m(3-m) = 0$$

✓ Los puntos son coplanarios para $m = 0$ y $m = 3$.

Apartado b)

Con $m = 1$: $A(1, 2, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, 4, 2)$, $D(1, -1, 1)$.

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (2, 2, 2) \quad \overrightarrow{AD} = (0, -3, 1)$$

Área del triángulo ABC :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2-2)\vec{i} - (2-2)\vec{j} + (2+2)\vec{k} = (-4, 0, 4)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|(-4, 0, 4)| = \frac{1}{2}\sqrt{16+0+16} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Volumen del tetraedro $ABCD$:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |1(2+6) + 1(2-0) + 1(-6-0)| = \frac{1}{6} |8+2-6| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

✓ **Área del triángulo $ABC = 2\sqrt{2} \text{ u}^2$. Volumen del tetraedro $ABCD = \frac{2}{3} \text{ u}^3$.**

⇒ **Error común:** Confundir el área del triángulo con el módulo del producto vectorial.
El área es la **mitad** de $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$.

BLOQUE OPTATIVO 1 · Ejercicio 3.1 (2,5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = a^2 \\ (1 - a)y + 2z = 0 \\ 4y + (3 - a)z = a - 5 \end{cases}$$

- a) [1,75 puntos] Discútelos según los valores de a .
 b) [0,75 puntos] Para $a = 0$ resuelve el sistema, si es posible.

Resolución**Apartado a)**

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} 1-a & 2 \\ 4 & 3-a \end{vmatrix} = 3[(1-a)(3-a) - 8] = 3[a^2 - 4a - 5] = 3(a-5)(a+1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a = 5 \quad \text{o} \quad a = -1$$

Si $a \neq 5$ y $a \neq -1$: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ **SCD**.

Si $a = 5$: Estudiamos la matriz ampliada por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3 \Rightarrow \text{SCI}.$$

Si $a = -1$: Estudiamos la matriz ampliada por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

Última fila: $(0 \ 0 \ 0 \mid -6) \Rightarrow$ contradicción.

$$\text{rg}(A) = 2, \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{SI}.$$

Valor de a	Tipo de sistema
$a \neq 5$ y $a \neq -1$	SCD
$a = 5$	SCI
$a = -1$	SI

Apartado b)

$|A| = 3(-5)(1) = -15 \neq 0 \Rightarrow$ SCD. Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-4F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array} \right)$$

$$z = 1 ; y = -2 ; x = -\frac{2}{3}$$

$$\checkmark \quad x = -\frac{2}{3}, \quad y = -2, \quad z = 1.$$

⇒ **Error común:** En la discusión, olvidar verificar el rango de la matriz ampliada para $a = 5$ y $a = -1$. Anular el determinante solo indica que no hay solución única.

BLOQUE OPTATIVO 1 · Ejercicio 3.2 (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$ que cumple $|A| = -2$.

- a) [1,5 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} -3 & -4 & -\alpha \\ \alpha - 2 & \beta - \alpha & 1 - \beta \\ 8 & 4\alpha & 4\beta \end{vmatrix}$
- b) [1 punto] Calcula $|A^{-1}(A^t)^2A|$

Resolución**Apartado a)**

Identificamos las filas del determinante como operaciones sobre las filas de A :

- Fila 1 = $-1 \times$ Fila 3 de A : $(-3, -4, -\alpha)$
- Fila 3 = $4 \times$ Fila 2 de A : $(8, 4\alpha, 4\beta)$
- Fila 2 = Fila 1 de A - Fila 2 de A : $(\alpha - 2, \beta - \alpha, 1 - \beta)$

Aplicamos propiedades de determinantes:

$$D = (-1) \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(\text{permutas})}$$

Reordenamos las filas para llegar a $|A|$. Intercambiamos $F_1 \leftrightarrow F_2$ ($\times(-1)$) y luego $F_1 \leftrightarrow F_3$ ($\times(-1)$):

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = |A| = -2$$

Luego:

$$D = (-1) \cdot 4 \cdot (-2) = 8$$

✓ El determinante vale 8.

Apartado b)

Usando las propiedades $|AB| = |A||B|$, $|A^t| = |A|$ y $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$:

$$|A^{-1}(A^t)^2A| = |A^{-1}| \cdot |A^t|^2 \cdot |A| = \frac{1}{|A|} \cdot |A|^2 \cdot |A| = |A|^2 = (-2)^2 = 4$$

✓ $|A^{-1}(A^t)^2A| = 4$

⇒ **Error común:** En el apartado b), intentar calcular las matrices explícitamente. Las propiedades de determinantes dan el resultado de forma inmediata sin ningún cálculo matricial.

BLOQUE OPTATIVO 2 · Ejercicio 4.1 (2,5 puntos)

Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{8e^x - 4e^{2x}}{1 + e^x}$, halla la primitiva de f cuya gráfica tiene por tangente a la recta $y = 2x + 12 \ln(2)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Sugerencia: puedes hacer el cambio $e^x = t$.

Resolución

Cambio de variable $e^x = t$, $dx = \frac{dt}{t}$:

$$\int \frac{8t - 4t^2}{1 + t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{8 - 4t}{1 + t} dt = \int \frac{-4(1 + t) + 12}{1 + t} dt = \int \left(-4 + \frac{12}{1 + t} \right) dt$$

$$F(x) = -4e^x + 12 \ln(1 + e^x) + C$$

Condición de tangente en $x = 0$:

La tangente es $y = 2x + 12 \ln 2$, luego $F(0) = 12 \ln 2$:

$$-4 + 12 \ln 2 + C = 12 \ln 2 \Rightarrow C = 4$$

Verificamos la pendiente: $F'(0) = f(0) = \frac{8 - 4}{1 + 1} = 2 \checkmark$

$$\checkmark \quad F(x) = -4e^x + 12 \ln(1 + e^x) + 4$$

$\Rightarrow$ **Error común:** No hacer el cambio de variable sugerido. Sin él, la integral resulta muy difícil de resolver directamente.

BLOQUE OPTATIVO 2 · Ejercicio 4.2 (2,5 puntos)

Disponemos de dos bolsas. Bolsa 1: 2 monedas de oro y 3 de plata. Bolsa 2: 6 monedas de oro y 3 de plata. Se extrae una moneda al azar de la bolsa 1 y se deposita en la bolsa 2. Luego se extrae una moneda de la bolsa 2.

a) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda moneda sea de oro, sabiendo que la moneda extraída de la primera bolsa era de plata.

b) [1,75 puntos] Calcula la probabilidad de que la moneda extraída de la primera bolsa fuera de plata, sabiendo que la segunda moneda es de oro.

Resolución**Apartado a)**

Si la primera moneda es plata, la bolsa 2 pasa a tener 6 oro + 4 plata = 10 monedas:

$$P(\text{oro}_2 \mid \text{plata}_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\checkmark \quad P(\text{oro}_2 \mid \text{plata}_1) = \frac{3}{5}$$

Apartado b)

Definimos: P_1 = primera moneda es plata ($P(P_1) = \frac{3}{5}$) y O_1 = primera moneda es oro ($P(O_1) = \frac{2}{5}$).

$$P(\text{oro}_2 \mid P_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad ; \quad P(\text{oro}_2 \mid O_1) = \frac{7}{10}$$

Probabilidad total:

$$P(\text{oro}_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{9}{25} + \frac{14}{50} = \frac{18}{50} + \frac{14}{50} = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}$$

Regla de Bayes:

$$P(P_1 \mid \text{oro}_2) = \frac{P(\text{oro}_2 \mid P_1) \cdot P(P_1)}{P(\text{oro}_2)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{16}{25}} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{16}{25}} = \frac{9}{16}$$

$$\checkmark \quad P(\text{plata}_1 \mid \text{oro}_2) = \frac{9}{16}$$

⇒ **Error común:** No calcular correctamente $P(\text{oro}_2)$ antes de aplicar Bayes. Es fundamental considerar los dos casos (primera moneda oro o plata) y sus probabilidades correspondientes.

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas II · Junio 2026