
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos
Septiembre 2020 (Extraordinaria) · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D). En cada bloque se elige un único ejercicio entre los dos propuestos (162, 364, 566, 768). Se incluye la resolución de **todos** los ejercicios para cubrir ambas opciones de cada bloque.

BLOQUE A · Ejercicio 1

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación: individual, doble y triple. La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros. El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) [1 punto] Expresa, mediante una matriz A , los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.

b) [1 punto] Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?

c) [0,5 puntos] ¿Existe la inversa de la matriz D ? ¿Y de la matriz A ? Justifique las respuestas.

Resolución

Apartado a)

$$A = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(A : filas = agencias, columnas = tipo de habitación; D : filas = tipo de habitación, columnas = institutos.)

Apartado b)

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix}$$

✓ Al Instituto 1 y al Instituto 2 les interesa la Agencia 1 (1678 € y 1670 €, más barata). Al Instituto 3 le interesa la Agencia 2 (2148 €, más barata que 2153 €).

Apartado c)

$$\det(D) = -83 \neq 0$$

✓ D tiene inversa. A es 2×3 (no cuadrada), por lo que no tiene inversa.

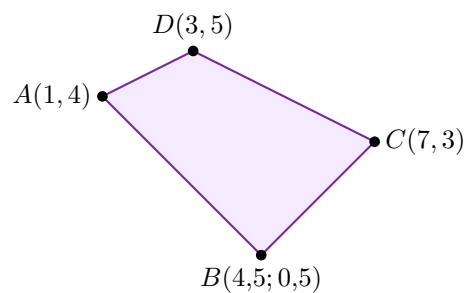
⇒ **Error común:** Intentar calcular la inversa de una matriz no cuadrada: solo las matrices cuadradas pueden tener inversa.

BLOQUE A · Ejercicio 2

a) [1,75 puntos] Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x + 2y \leq 13 \quad x - y \leq 4 \quad x - 2y \geq -7 \quad x + y \geq 5$$

b) [0,75 puntos] Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = x + y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

Resolución**Apartado a)**

✓ **Vértices:** $A(1, 4)$, $B(4, 5)$, $C(7, 3)$, $D(3, 5)$.

Apartado b)

$$F(A) = 5 \quad F(B) = 5 \quad F(C) = 10 \quad F(D) = 8$$

✓ **Máximo en $C(7, 3)$, vale 10. Mínimo en todo el segmento AB , vale 5.**

⇒ **Error común:** No darse cuenta de que el mínimo se alcanza en todo un segmento (no solo en un punto) cuando dos vértices consecutivos dan el mismo valor de la función objetivo.

BLOQUE B · Ejercicio 3

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{a}{x-1} & x < 0 \\ a + be^x & x \geq 0 \end{cases}$$

a) [1,25 puntos] Calcule los valores a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.

b) [0,75 puntos] Para $a = 2$ y $b = -2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.

c) [0,5 puntos] Para $a = 2$ y $b = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de f , si existen.

Resolución**Apartado a)**

Continuidad: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 - a = f(0) = a + b \Rightarrow 2a + b = 2$

Derivabilidad: $f'(0^-) = -a$, $f'(0^+) = b \Rightarrow -a = b$

✓ $a = 2$, $b = -2$.

Apartado b)

Con $a = 2$, $b = -2$: $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$ ($x < 0$); $f'(x) = -2e^x < 0$ ($x \geq 0$).

✓ **Estrictamente decreciente en todo $\mathbb{R}$. No tiene extremos relativos.**

Apartado c)

Para $x < 0$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ asíntota horizontal. Para $x \geq 0$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

✓ **Asíntota horizontal $y = 2$ (solo por la izquierda). No tiene asíntota vertical ni oblicua.**

BLOQUE B · Ejercicio 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & 2 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x} & x \geq 4 \end{cases}$$

- a) [1,25 puntos] Estudie la continuidad y derivabilidad de f en su dominio.
b) [0,75 puntos] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .
c) [0,5 puntos] Calcule $\int_2^3 f(x) dx$.

Resolución**Apartado a)**

En $x = 2$: $f(2) = 0$, límite por la derecha $= 0 \rightarrow$ continua. $f'(2^-) = -1 \neq 2 = f'(2^+) \rightarrow$ **no derivable**.

En $x = 4$: $f(4^-) = 0$, $f(4) = \frac{1}{4} \rightarrow$ **no continua** (y por tanto tampoco derivable).

✓ **Continua en $\mathbb{R} - \{4\}$. Derivable en $\mathbb{R} - \{2, 4\}$.**

Apartado b)

✓ **Decreciente en $(-\infty, 2) \cup (3, 4)$, creciente en $(2, 3) \cup (4, +\infty)$. Mínimo relativo en $(2, 0)$, máximo relativo en $(3, 1)$.**

Apartado c)

$$\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (-x^2 + 6x - 8) dx = \frac{2}{3}$$

✓ $\int_2^3 f(x) dx = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar comprobar la continuidad en todos los puntos de empalme antes de estudiar la derivabilidad: si no es continua, automáticamente tampoco es derivable.

BLOQUE C · Ejercicio 5

Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

- a) [1,5 puntos] Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.
b) [1 punto] Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

Resolución

Si sale roja (prob $6/10$), la urna queda con 5R, 10A (de 15). Si sale azul (prob $4/10$), la urna queda con 12R, 3A (de 15).

Apartado a)

$$P(2^{\text{a}} \text{ roja}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{15} + \frac{4}{10} \times \frac{12}{15} = \frac{13}{25} = 0,52$$

✓ $P(2^{\text{a}} \text{ roja}) = 0,52$.

Apartado b)

$$P(1^{\text{a}} \text{ azul}/2^{\text{a}} \text{ azul}) = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{3}{15}}{\frac{6}{10} \times \frac{10}{15} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{15}} = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

✓ $P(1^{\text{a}} \text{ azul}/2^{\text{a}} \text{ azul}) \approx 0,167$.

⇒ **Error común:** Olvidar que la composición de la urna cambia según el color de la primera bola extraída (no es una extracción con reemplazo simple, sino que se añaden 6 bolas del otro color).

BLOQUE C · Ejercicio 6

Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5 % de las LED y un 2 % de las halógenas salen defectuosas. Se elige al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

- a) [1,5 puntos] Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida no sea defectuosa.
b) [1 punto] Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa.

Resolución**Apartado a)**

$$P(\text{no def}) = \frac{40}{50}(0,95) + \frac{10}{50}(0,98) = 0,956$$

✓ $P(\text{no defectuosa}) = 0,956$.

Apartado b)

$$P(\text{LED/def}) = \frac{(40/50) \times 0,05}{1 - 0,956} = \frac{10}{11} \approx 0,909$$

✓ $P(\text{LED/def}) \approx 0,909$.

BLOQUE D · Ejercicio 7

a) [1 punto] Una población de 25000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15000, 5000, 3000 y 2000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) [1,5 puntos] Dada la población $P = \{2, 4, 6\}$, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

Resolución**Apartado a)**

$$r = \frac{36}{3000} = 0,012$$

✓ **Muestra total = 300: 180, 60, 36, 24 personas por estrato (respectivamente).**

Apartado b)

$$\text{Población } \{2, 4, 6\}: \mu = 4, \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{2} = \frac{4}{3}$$

✓ **Desviación típica de las medias muestrales = $\sqrt{4/3} \approx 1,15$.**

BLOQUE D · Ejercicio 8

Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de:

8; 9,2; 10; 8,5; 12; 9; 11,3; 7; 8,5; 8,3; 7,6; 9; 9,4; 10,5; 8,9; 6,8

Supongamos que el tiempo de espera en esta consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) [1,5 puntos] Halle un intervalo de confianza al 97,5 % para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.

b) [1 punto] ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90 %, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0,3 minutos?

Resolución

$$\sigma = \sqrt{4} = 2.$$

Apartado a)

Media = 9. Con $z = 2,24$ (97,5 %):

$$E = 2,24 \times \frac{2}{\sqrt{16}} \approx 1,12$$

✓ **IC 97,5 %:** (7,88, 10,12).

Apartado b)

Con $z = 1,645$ (90 %):

$$n \geq \left(\frac{1,645 \times 2}{0,3} \right)^2 \approx 120,25$$

✓ $n_{\min} = 121.$

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas CCSS · Septiembre 2020