
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2025 (Ordinaria) · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D). El Bloque A tiene un único ejercicio (Ejercicio 1). En los Bloques B, C y D se puede elegir entre dos ejercicios (263, 465, 667). Se incluye la resolución de **todos** los ejercicios para cubrir ambas opciones de cada bloque.

BLOQUE A · Ejercicio 1

El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes. El vendedor de la zona B ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. El vendedor de la zona C ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75 € por hora trabajada, 300 € por demostración y 250 € por viaje realizado.

a) Utilizando el producto de matrices, y teniendo en cuenta que además debe aplicárseles una retención del IRPF del 15 % si la cantidad a abonar es menor de diez mil euros y del 18 % en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

b) Estudie para qué valores de a la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es invertible.

Resolución**Apartado a)**

Organizamos los datos (horas, demostraciones, viajes) en una matriz M y las tarifas en un vector columna P :

$$M = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 5 \\ 80 & 15 & 8 \\ 100 & 25 & 10 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix}$$

(El vendedor B trabajó el doble de horas que A: $2 \times 40 = 80$.)

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} 7250 \\ 12500 \\ 17500 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la retención: 15 % si el bruto es menor de 10 000 €, 18 % en caso contrario.

Vendedor	Bruto	Retención	Neto
A	7250 €	15 %	6162,5 €
B	12500 €	18 %	10250 €
C	17500 €	18 %	14350 €

✓ **Vendedor A: 6162,5 €. Vendedor B: 10250 €. Vendedor C: 14350 €.**

⇒ **Error común:** Olvidar que el vendedor B trabajó el doble de horas que A (80 h, no 40 h).

Apartado b)

A es invertible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Desarrollando por la tercera fila:

$$\det(A) = -2[3(a-1)] - 2[9-8] + 1[-4(a-1)] = -10(a-1) - 2 = -10a + 8$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

✓ A es invertible para todo $a \neq \frac{4}{5}$.

$\Rightarrow$ **Error común:** Errores de signo al desarrollar el determinante 3×3 por una fila con ceros.

BLOQUE B · Ejercicio 2

El número de personas $N(t)$ que conocen una noticia t horas después de su publicación viene dado por $N(t) = 500\,000(1 - e^{-0,2t})$, $t > 0$.

- a) Estudie la monotonía y curvatura de N .
- b) Represente gráficamente N e indique su tendencia.
- c) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que 450 000 personas conozcan la noticia?
- d) Compare la velocidad de difusión en $t = 1$ y en $t = 10$.

Resolución**Apartado a)**

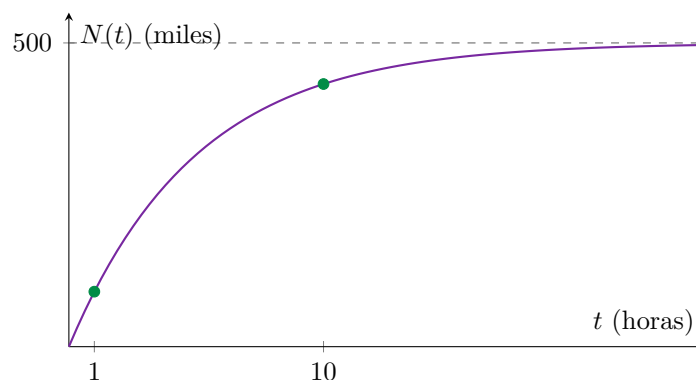
$$N'(t) = 100\,000 e^{-0,2t} > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow N \text{ es } \mathbf{creciente}$$

$$N''(t) = -20\,000 e^{-0,2t} < 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow N \text{ es } \mathbf{cóncava}$$

✓ N es creciente y cóncava en todo su dominio.

Apartado b)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} N(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 500\,000 \text{ (asíntota horizontal).}$$



✓ La curva crece rápido al principio y se estabiliza en 500 000 personas (saturación).

Apartado c)

$$500\,000(1 - e^{-0,2t}) = 450\,000 \Rightarrow e^{-0,2t} = 0,1 \Rightarrow t = \frac{\ln 10}{0,2} \approx 11,51$$

✓ Deben pasar aproximadamente 11,51 horas ($\approx 11\text{h } 31\text{min}$).

Apartado d)

$$N'(1) = 100\,000 e^{-0,2} \approx 81\,873 \quad N'(10) = 100\,000 e^{-2} \approx 13\,534$$

✓ $N'(1) > N'(10)$: la velocidad de difusión disminuye con el tiempo.

⇒ **Error común:** Confundir “ N creciente” con “velocidad constante o creciente”. N siempre crece, pero cada vez más despacio.

BLOQUE B · Ejercicio 3

A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamento a mediodía. El nivel de glucosa en sangre (mg/dl) viene dado por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{5}{6} \left(\frac{t^3}{3} - 12t^2 + 108t + 108 \right) & 0 \leq t \leq 12 \\ t^2 - 40t + 546 & 12 < t \leq 24 \end{cases}$$

- a) Halle en qué periodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando.
b) ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa y a cuánto ascienden?
c) ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene 155 mg/dl?

Resolución**Apartado a)**

Para $0 \leq t \leq 12$: $f'(t) = \frac{5}{6}(t^2 - 24t + 108) = 0 \Rightarrow t = 6$ (la otra raíz, $t = 18$, no pertenece al tramo). f es creciente en $(0, 6)$, decreciente en $(6, 12)$.

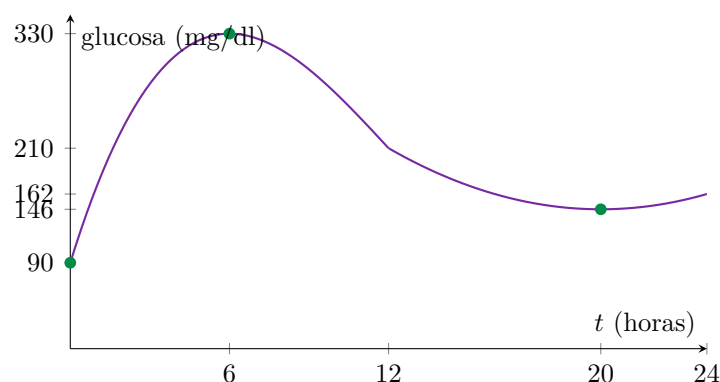
Para $12 < t \leq 24$: $f'(t) = 2t - 40 = 0 \Rightarrow t = 20$. f es decreciente en $(12, 20)$, creciente en $(20, 24)$.

✓ El nivel de glucosa aumenta en $(0, 6)$ y en $(20, 24)$; disminuye en $(6, 20)$.

Apartado b)

Evaluamos f en los puntos críticos y en los extremos del dominio:

t	0	6	12	20	24
$f(t)$	90	330	210	146	162



✓ Nivel más alto: 330 mg/dl a las 6h. Nivel más bajo: 90 mg/dl a las 0h (medianoche).

⇒ **Error común:** Quedarse solo con los puntos críticos y olvidar comprobar los extremos del dominio ($t = 0$, $t = 24$), que aquí es precisamente donde está el mínimo absoluto.

Apartado c)

Después del mediodía usamos $f(t) = t^2 - 40t + 546$:

$$t^2 - 40t + 546 = 155 \Rightarrow t^2 - 40t + 391 = 0 \Rightarrow t = \frac{40 \pm 6}{2} = 23 \text{ o } 17$$

✓ El paciente tiene 155 mg/dl a las 17h y a las 23h.

BLOQUE C · Ejercicio 4

En una casa con trastero viven tres personas y cada una tiene un llavero. El primer llavero contiene 7 llaves, el segundo 8 y el tercero 5. En cada llavero hay una única llave que abre el trastero. Otra persona selecciona un llavero al azar y, de éste, elige una llave al azar e intenta abrir. Calcule la probabilidad de que:

- a) No haya acertado con la llave. b) El llavero sea el tercero y la llave abra.
c) Sabiendo que la llave abre, pertenezca al primer o al tercer llavero.
d) Si la llave no abre, no pertenezca al primer llavero.

Resolución

Sea L_i = “se elige el llavero i ” ($P(L_i) = \frac{1}{3}$), A = “la llave abre”. $P(A/L_1) = \frac{1}{7}$, $P(A/L_2) = \frac{1}{8}$, $P(A/L_3) = \frac{1}{5}$.

Apartado a)

$$P(A) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \right) = \frac{131}{840} \quad P(\text{no } A) = 1 - \frac{131}{840} = \frac{709}{840} \approx 0,844$$

$$\checkmark \quad P(\text{no acierta}) = \frac{709}{840} \approx 0,844.$$

Apartado b)

$$P(L_3 \cap A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0,067$$

$$\checkmark \quad P(L_3 \cap A) = \frac{1}{15} \approx 0,067.$$

Apartado c)

$$P(L_1 \cup L_3/A) = \frac{\frac{1}{21} + \frac{1}{15}}{\frac{131}{840}} = \frac{96}{131} \approx 0,733$$

$$\checkmark \quad P(L_1 \cup L_3/A) = \frac{96}{131} \approx 0,733.$$

Apartado d)

$$P(\text{no } L_1/\text{no } A) = \frac{\frac{709}{840} - \frac{2}{7}}{\frac{709}{840}} = \frac{469}{709} \approx 0,661$$

$$\checkmark \quad P(\text{no } L_1/\text{no } A) = \frac{469}{709} \approx 0,661.$$

⇒ **Error común:** Olvidar ponderar por $P(L_i) = \frac{1}{3}$ (teorema de la probabilidad total) o confundir probabilidad condicionada con conjunta.

BLOQUE C · Ejercicio 5

Una empresa de marketing ha lanzado una campaña para promocionar un servicio de energía solar. Se sabe que el 20 % de las personas que reciben la publicidad contratan el servicio. Se seleccionan al azar 20 personas.

- a) Calcule la probabilidad de que exactamente 10 contraten el servicio.
- b) Calcule la probabilidad de que al menos 2 contraten el servicio.
- c) Calcule el número esperado de personas que contratarán el servicio.
- d) ¿Cuántas personas, como mínimo, deberían recibir la publicidad para que se espere que al menos 13 contraten el servicio?

Resolución

$$X \sim B(20, 0,2).$$

Apartado a)

$$P(X = 10) = \binom{20}{10} (0,2)^{10} (0,8)^{10} \approx 0,00203$$

$$\checkmark \quad P(X = 10) \approx 0,0020.$$

Apartado b)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 0,9309$$

$$\checkmark \quad P(X \geq 2) \approx 0,9309.$$

Apartado c)

$$E[X] = np = 20 \times 0,2 = 4$$

$$\checkmark \quad \text{Valor esperado} = 4 \text{ personas.}$$

Apartado d)

$$n \times 0,2 \geq 13 \Rightarrow n \geq 65$$

$$\checkmark \quad \text{Se necesitarían al menos } n = 65 \text{ personas.}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** En b), olvidar restar $P(X = 1)$ y calcular solo $1 - P(X = 0)$.

BLOQUE D · Ejercicio 6

El tiempo de estudio semanal de los estudiantes andaluces (horas) sigue una $N(\mu, 5)$. A partir de una muestra de 81 estudiantes se obtiene el IC para μ al 97 %: (10,794, 13,206).

- a) Obtenga la media muestral.
- b) Si se amplía n manteniendo el nivel de confianza, ¿la amplitud aumenta o disminuye?
- c) Si se desea reducir la amplitud manteniendo n , ¿hay que reducir o aumentar el nivel de confianza?
- d) Si la media poblacional es 10,2 y la muestral es 12, calcule el tamaño máximo de la muestra para que el IC (97 %) siga conteniendo a la poblacional.

Resolución**Apartado a)**

$$\bar{x} = \frac{10,794 + 13,206}{2} = 12$$

✓ **Media muestral = 12 horas.**

Apartado b)

La amplitud es $2z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si n aumenta (z fijo), la amplitud **disminuye**.

✓ **La amplitud disminuye al aumentar n .**

Apartado c)

Para reducir la amplitud con n fijo hace falta un z menor, es decir, un nivel de confianza **menor**.

✓ **Hay que reducir el nivel de confianza.**

Apartado d)

Usamos $z = 2,17$ (97 %, mismo de a)). Necesitamos que $\mu = 10,2$ siga dentro del IC centrado en $\bar{x} = 12$:

$$|\bar{x} - \mu| \leq z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1,8 \leq 2,17 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} \leq 6,028 \Rightarrow n \leq 36,34$$

✓ **$n_{\text{máx}} = 36$ estudiantes.**

⇒ **Error común:** Confundir este apartado con el cálculo habitual de “ n mínimo”: aquí se pide el tamaño *máximo* que mantiene μ dentro del IC, así que se redondea hacia abajo.

BLOQUE D · Ejercicio 7

Los desajustes (en minutos) en la llegada de los trenes de alta velocidad siguen una $N(0, 2,2)$.

a) Calcule el porcentaje de trenes con un desajuste máximo de 1 minuto.

b) Se toma una muestra de 15 desajustes: 0, 1,3, -2,1, -1,5, 2, 0,8, 5, 2,1, -3, 1,8, 3,1, 4, -0,7, 1

b1) Calcule un IC al 96 % para la media poblacional y el error máximo cometido.

¿Puede afirmarse que la media poblacional es un retraso de 2 minutos?

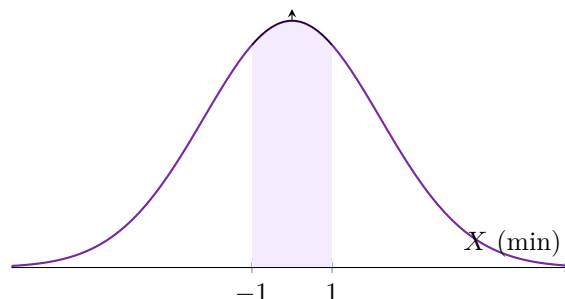
b2) Con un nivel de confianza del 98 %, ¿cuántos trenes deberían elegirse, como mínimo, para que el error sea como máximo de 1,1 minutos?

Resolución**Apartado a)**

$$P(-1 \leq X \leq 1) = p\left(\frac{-1-0}{2,2} \leq z \leq \frac{1-0}{2,2}\right) = p(-0,45 \leq z \leq 0,45)$$

Redondeamos $z = 1/2,2 = 0,4545$ a dos decimales, $z \approx 0,45$, y leemos directamente en la tabla $\Phi(0,45) = 0,6736$ (aquí no se interpola: se busca $\Phi(z)$ a partir de un z conocido):

$$P = p(z \leq 0,45) - p(z \leq -0,45) = 2 \times 0,6736 - 1 = 0,3472$$



✓ Aproximadamente el 34,72 % de los trenes tiene un desajuste máximo de 1 minuto.

⇒ **Error común:** Interpolan innecesariamente cuando se busca $\Phi(z)$ a partir de un z conocido: aquí basta con redondear z a dos decimales y leer la tabla directamente. La interpolación se reserva para el caso inverso: buscar z a partir de una probabilidad objetivo (como en los apartados b1 y b2).

Apartado b1)

Media muestral: $\bar{x} = \frac{9}{15} = 0,6$.

Para el 96 %: buscamos $\Phi(z) = \frac{1+0,96}{2} = 0,98$. Interpolando entre $\Phi(2,05) = 0,9798$ y $\Phi(2,06) = 0,9803$: $z \approx 2,055$.

$$E = 2,055 \times \frac{2,2}{\sqrt{15}} \approx 1,1673$$

$$IC = (0,6 - 1,1673, 0,6 + 1,1673) = (-0,5673, 1,7673)$$

✓ **IC 96 %:** $(-0,5673, 1,7673)$ minutos. Error máximo $\approx 1,1673$ minutos.

Como 2 no pertenece al intervalo:

✓ **No puede afirmarse que la media poblacional sea un retraso de 2 minutos.**

Apartado b2)

Para el 98 %: $\Phi(z) = 0,99 \Rightarrow z \approx 2,33$.

$$n \geq \left(\frac{2,33 \times 2,2}{1,1} \right)^2 \approx 21,72$$

✓ $n_{\min} = 22$ trenes.

⇒ **Error común:** Usar la desviación típica muestral en lugar de $\sigma = 2,2$, que ya viene dada como dato poblacional.

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas CCSS · Junio 2025