
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2024 (Ordinaria) · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D). En cada bloque se elige un único ejercicio entre los dos propuestos (162, 364, 566, 768). Se incluye la resolución de **todos** los ejercicios para cubrir ambas opciones de cada bloque.

BLOQUE A · Ejercicio 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$, $B = (-1 \ 3 \ 2)$, $C = (-2 \ 1 \ 4)$,

siendo a un número real.

- a) [0,75 puntos] Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.
b) [1,25 puntos] Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X \cdot A - B = C \cdot A$.
c) [0,5 puntos] Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación $B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$

Resolución**Apartado a)**

A tiene inversa $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Desarrollando por la primera fila:

$$\det(A) = 1[(a-1)a-2] - 1[(a-3)a-0] - 2[2(a-3)-0] = -2a+10$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow a = 5$$

✓ **A tiene inversa para todo $a \neq 5$.**

Apartado b)

Para $a = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Como B y C son vectores fila 1×3 y A es 3×3 , X debe ser un vector fila 1×3 . Despejamos:

$$X \cdot A - B = C \cdot A \Rightarrow X \cdot A = C \cdot A + B \Rightarrow X = C + B \cdot A^{-1}$$

Calculando $C \cdot A = (-4 \ 6 \ 9)$, luego $C \cdot A + B = (-5 \ 9 \ 11)$, y multiplicando por A^{-1} :

✓ $X = \left(-2, \frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ **Error común:** Despejar X multiplicando por A^{-1} por el lado incorrecto (la ecuación matricial no es conmutativa: hay que multiplicar por A^{-1} por la derecha en ambos miembros).

Apartado c)

$B \cdot A$ es $(1 \times 3)(3 \times 3) = 1 \times 3$. C^t es 3×1 , así que $D \cdot C^t$ requiere que D tenga 3 columnas; sea D de dimensión $m \times 3$, entonces $D \cdot C^t$ es $m \times 1$. Multiplicando por B (1×3) : $(m \times 1)(1 \times 3) = m \times 3$. Para que se pueda **sumar** con $B \cdot A$ (1×3) , necesitamos $m = 1$.

✓ **D debe ser una matriz de dimensión 1×3 .**

⇒ **Error común:** Olvidar que B y C son vectores fila (no columna), lo que cambia las dimensiones compatibles en todo el ejercicio.

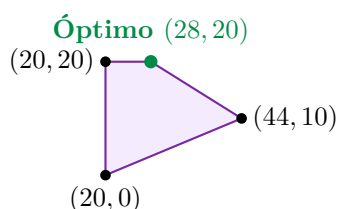
BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de 30000 m^3 de agua, de 5500 kg de abono y de 3000 kg de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita 1500 m^3 de agua, 110 kg de abono y 80 kg de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de 100 kg de abono y 50 kg de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de 5000 kg en secano y de 10000 kg en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultivar para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

Resolución

Sea x = hectáreas de secano, y = hectáreas de regadío. Función objetivo (producción a **maximizar**): $P(x, y) = 5000x + 10000y$.

Restricciones: $x \geq 20$, $1500y \leq 30000$ ($y \leq 20$), $100x + 110y \leq 5500$, $50x + 80y \leq 3000$, $x, y \geq 0$.



Evaluamos P en los vértices de la región factible:

Vértice	$P = 5000x + 10000y$
(20, 0)	100000
(44, 10)	320000
(28, 20)	340000

✓ **28 hectáreas de secano y 20 de regadío. Producción máxima: 340000 kg.**

⇒ **Error común:** Olvidar la restricción $x \geq 20$ (mínimo de secano) o no comprobar todas las restricciones (agua, abono, fitosanitarios) al validar cada vértice.

BLOQUE B · Ejercicio 3

a) [1,5 puntos] Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x) = (x^2 + 2)^3 \cdot e^{-2x} \quad g(x) = \frac{\ln(1 - x^3)}{(1 - 2x^2)^2}$$

b) [1 punto] Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ en el punto $P(1, 2)$.

Resolución**Apartado a)**

Por producto y regla de la cadena:

$$f'(x) = 3(x^2 + 2)^2(2x)e^{-2x} + (x^2 + 2)^3(-2)e^{-2x} = 2e^{-2x}(x^2 + 2)^2[3x - (x^2 + 2)]$$

$$\checkmark \quad f'(x) = -2e^{-2x}(x^2 + 2)^2(x - 1)(x - 2).$$

Con $u = \ln(1 - x^3)$, $u' = \frac{-3x^2}{1 - x^3}$; $v = (1 - 2x^2)^2$, $v' = -8x(1 - 2x^2)$:

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\checkmark \quad g'(x) = \frac{8x \ln(1 - x^3) - \frac{3x^2(1 - 2x^2)}{1 - x^3}}{(1 - 2x^2)^3}.$$

Apartado b)

Recta tangente horizontal en $P(1, 2)$ implica $h'(1) = 0$ y $h(1) = 2$.

$$h'(x) = 3x^2 + 2ax + 3 \Rightarrow h'(1) = 6 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$h(1) = 1 + a + 3 + b = 2 \Rightarrow 1 - 3 + 3 + b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\checkmark \quad a = -3, b = 1.$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Usar solo la condición $h'(1) = 0$ y olvidar que el punto $P(1, 2)$ también debe pertenecer a la gráfica ($h(1) = 2$).

BLOQUE B · Ejercicio 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo en horas:

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & 0 \leq t \leq 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & 10 < t \leq 24 \end{cases}$$

- a) [0,75 puntos] Compruebe que la función v es continua y derivable.
b) [1 punto] Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.
c) [0,75 puntos] La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y 140 km/h, y rojo para vientos de más de 140 km/h. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa. ¿Se emitiría alerta roja?

Resolución**Apartado a)**

$$v(10^-) = 100 - 80 + 60 = 80 \quad v(10^+) = -100 + 320 - 140 = 80 \Rightarrow \text{continua}$$

$$v'(10^-) = 2(10) - 8 = 12 \quad v'(10^+) = -2(10) + 32 = 12 \Rightarrow \text{derivable}$$

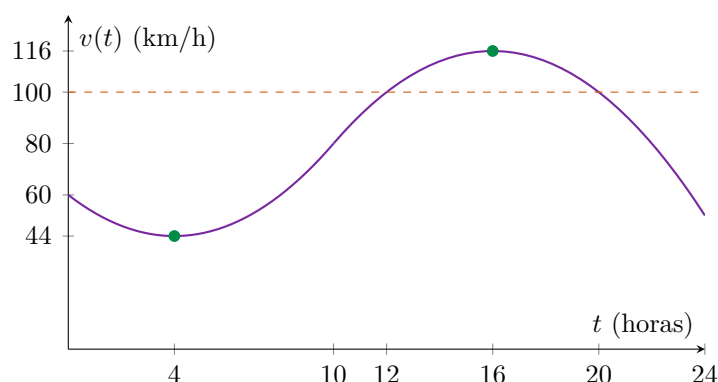
✓ v es continua y derivable en $t = 10$ (coinciden valor y pendiente).

Apartado b)

Tramo 1: $v'(t) = 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4$ (mínimo). Decreciente en $[0, 4)$, creciente en $(4, 10]$.

Tramo 2: $v'(t) = -2t + 32 = 0 \Rightarrow t = 16$ (máximo). Creciente en $(10, 16)$, decreciente en $(16, 24]$.

Valores: $v(0) = 60$, $v(4) = 44$, $v(10) = 80$, $v(16) = 116$, $v(24) = 52$.



✓ Máximo absoluto: 116 km/h en $t = 16$ h. Mínimo absoluto: 44 km/h en $t = 4$ h.

Apartado c)

Resolviendo $-t^2 + 32t - 140 = 100$: $t = 12$ o $t = 20$.

✓ Alerta naranja activa entre las 12h y las 20h. No se emitiría alerta roja (el máximo previsto es 116 km/h, por debajo de 140).

⇒ **Error común:** Olvidar comprobar los extremos del dominio ($t = 0$, $t = 24$) al buscar los extremos absolutos, quedándose solo con los puntos críticos internos.

BLOQUE C · Ejercicio 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto. También se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto. De los 54 siniestros registrados, en 19 el vehículo implicado era nuevo y en 29 los conductores eran jóvenes. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos viejos y conductores jóvenes. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) [1 punto] Calcule la probabilidad de que el conductor sea sénior y el vehículo viejo.

b) [1 punto] Calcule la probabilidad de que el conductor sea joven sabiendo que el vehículo es viejo.

c) [0,5 puntos] Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: “Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es sénior y el vehículo es nuevo”.

Resolución

Completamos la tabla de contingencia ($N = 19$ nuevos, $V = 35$ viejos; $J = 29$ jóvenes, $S = 25$ sénior; $V \cap J = 21$):

$$V \cap S = 35 - 21 = 14 \quad J \cap N = 29 - 21 = 8 \quad N \cap S = 19 - 8 = 11$$

Apartado a)

$$\checkmark \quad P(S \cap V) = \frac{14}{54} = \frac{7}{27} \approx 0,2593.$$

Apartado b)

$$P(J/V) = \frac{21}{35} = 0,6$$

$$\checkmark \quad P(J/V) = 0,6.$$

Apartado c)

Comparamos las cuatro combinaciones: $N \cap J = \frac{8}{54} \approx 0,148$; $V \cap J = \frac{21}{54} \approx 0,389$; $N \cap S = \frac{11}{54} \approx 0,204$; $V \cap S = \frac{14}{54} \approx 0,259$.

✓ La afirmación es falsa: la combinación menos probable es conductor joven y vehículo nuevo ($\approx 0,148$), no sénior y nuevo ($\approx 0,204$).

$\Rightarrow$ Error común: Calcular solo $P(S \cap N)$ sin comparar con las otras tres combinaciones posibles.

BLOQUE C · Ejercicio 6

Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42 % de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32 % de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65 % de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75 % de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20 % de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

- a) [1 punto] Sea mayor de edad.
- b) [0,5 puntos] Proceda de Andalucía y sea menor de edad.
- c) [1 punto] Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

Resolución

$$P(\text{Andalucía}) = 0,42, P(\text{otras CCAA}) = 0,32, P(\text{extranjero}) = 0,26.$$

Apartado a)

$$P(\text{mayor}) = 0,42(0,65) + 0,32(0,75) + 0,26(0,80) = 0,721$$

$$\checkmark P(\text{mayor de edad}) = 0,721.$$

Apartado b)

$$P(\text{Andalucía} \cap \text{menor}) = 0,42 \times 0,35 = 0,147$$

$$\checkmark P(\text{Andalucía} \cap \text{menor}) = 0,147.$$

Apartado c)

$$P(\text{menor}) = 1 - 0,721 = 0,279; P(\text{extranjero} \cap \text{menor}) = 0,26 \times 0,20 = 0,052$$

$$P(\text{extranjero}/\text{menor}) = \frac{0,052}{0,279} \approx 0,1864$$

$$\checkmark P(\text{extranjero}/\text{menor}) \approx 0,1864.$$

BLOQUE D · Ejercicio 7

a) [1,5 puntos] Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1 , E_2 , E_3 y E_4 . En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2 . En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4 . Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

b) [1 punto] Dada la población $\{-3, -1, 2, 5, 7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

Resolución**Apartado a)**

Con afijación proporcional, la razón muestra/población es constante dentro de cada muestreo:

$$r_1 = \frac{25}{500} = 0,05 \Rightarrow N(E_2) = \frac{30}{0,05} = 600 \quad r_2 = \frac{80}{400} = 0,20 \Rightarrow N(E_4) = \frac{100}{0,20} = 500$$

✓ **Población:** $E_1 = 500$, $E_2 = 600$, $E_3 = 400$, $E_4 = 500$ (total $N = 2000$).

Aplicando cada razón a los cuatro estratos:

✓ **Muestreo 1** ($n_1 = 100$): $E_1 = 25$, $E_2 = 30$, $E_3 = 20$, $E_4 = 25$. **Muestreo 2** ($n_2 = 400$): $E_1 = 100$, $E_2 = 120$, $E_3 = 80$, $E_4 = 100$.

⇒ **Error común:** Aplicar la razón de un muestreo a la población calculada con el otro muestreo: cada razón solo es válida dentro de su propio muestreo.

Apartado b)

$$\mu = \frac{-3 - 1 + 2 + 5 + 7}{5} = 2 \quad \sigma^2 = \frac{1}{5} \sum (x_i - \mu)^2 = \frac{68}{5} = 13,6$$

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 2 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{13,6}{5} = 2,72$$

✓ **Media = 2. Varianza = 2,72.**

BLOQUE D · Ejercicio 8

Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

a) [1,25 puntos] Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 95 %, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible.

b) [0,75 puntos] Para un nivel de confianza del 97 % y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1 %?

c) [0,5 puntos] Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

Resolución**Apartado a)**

$\hat{p} = \frac{1825}{2500} = 0,73$. Con $z = 1,96$ (95 %):

$$E = 1,96 \sqrt{\frac{0,73 \times 0,27}{2500}} \approx 0,0174$$

✓ **IC 95 %:** (0,7126, 0,7474).

Apartado b)

Con $z = 2,17$ (97 %) y $E < 0,01$:

$$n \geq \frac{2,17^2 \times 0,73 \times 0,27}{0,01^2} \approx 9281,24$$

✓ $n_{\min} = 9282$ habitantes.

Apartado c)

Al disminuir n , el error $E = z\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ aumenta.

✓ **La amplitud del intervalo aumenta al disminuir el tamaño muestral.**

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas CCSS · Junio 2024