
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2023 (Ordinaria) · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D). En cada bloque se elige un único ejercicio entre los dos propuestos (162, 364, 566, 768). Se incluye la resolución de **todos** los ejercicios para cubrir ambas opciones de cada bloque.

BLOQUE A · Ejercicio 1

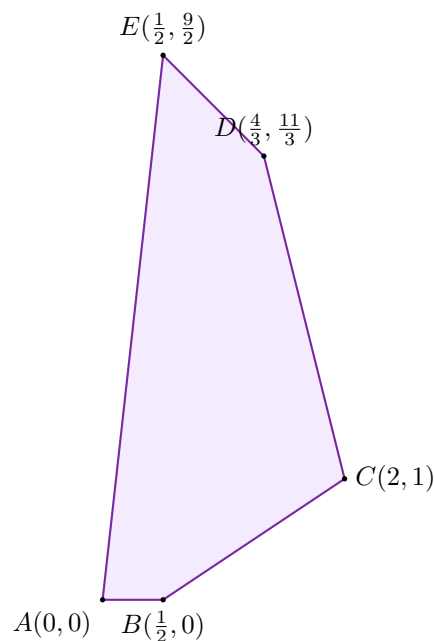
Sean la función $F(x, y) = 5x - 3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x - 3y \leq 1; \quad 4x + y \leq 9; \quad x + y \leq 5; \quad 9x - y \geq 0; \quad y \geq 0$$

- a) [1,3 puntos] Dibuje la región R y calcule sus vértices.
b) [0,5 puntos] Indique razonadamente si los puntos $A(2, 2)$ y $B(1, 3,5)$ pertenecen a la región R .
c) [0,7 puntos] Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

Resolución**Apartado a)**

Hallamos los vértices intersecando cada par de rectas frontera:



✓ **Vértices:** $A(0, 0)$, $B(\frac{1}{2}, 0)$, $C(2, 1)$, $D(\frac{4}{3}, \frac{11}{3})$, $E(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$.

Apartado b)

Comprobando las 5 inecuaciones: en $A(2, 2)$ falla $4x + y \leq 9$ ($8 + 2 = 10 > 9$).

✓ $A(2, 2)$ **no pertenece a R** . $B(1, 3,5)$ **sí pertenece a R** (cumple las 5 inecuaciones).

Apartado c)

Evaluamos F en cada vértice:

Vértice	$F = 5x - 3y$
$A(0, 0)$	0
$B(\frac{1}{2}, 0)$	2,5
$C(2, 1)$	7
$D(\frac{4}{3}, \frac{11}{3})$	-4,33
$E(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$	-11

✓ Máximo en $C(2, 1)$, vale **7**. Mínimo en $E(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, vale **-11**.

⇒ **Error común:** Olvidar comprobar todos los vértices (incluidos los “menos evidentes” como D y E), quedando el mínimo o máximo real sin detectar.

BLOQUE A · Ejercicio 2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Calcule los valores del parámetro a para los que tanto A como B admitan inversa.

b) [1,5 puntos] Para $a = 1$, halle una matriz X que satisfaga $A \cdot X \cdot B = C$.

Resolución**Apartado a)**

$$\det(A) = a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0, 2 \quad \det(B) = a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

✓ **Ambas tienen inversa para $a \neq 0$ y $a \neq 2$.**

Apartado b)

Para $a = 1$, despejamos: $A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

$$✓ \quad X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Despejar X multiplicando por las inversas en el orden incorrecto: como el producto de matrices no es conmutativo, hay que multiplicar por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha, respetando el orden.

BLOQUE B · Ejercicio 3

Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

- a) [1 punto] Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de f y su curvatura.
- b) [0,5 puntos] Represente gráficamente la función f .
- c) [1 punto] Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Resolución**Apartado a)**

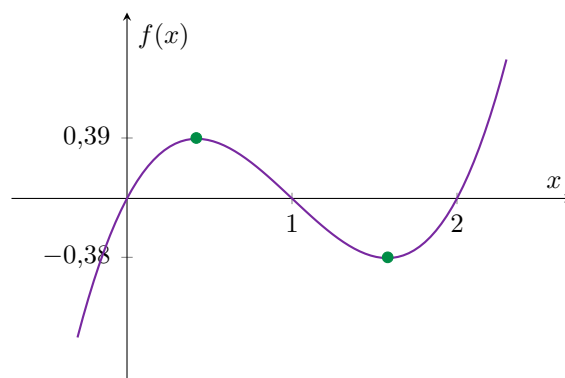
Corte ejes: $f(x) = x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow (0,0), (1,0), (2,0)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

✓ Creciente en $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, decreciente entre medias. Máximo relativo en $(0,42, 0,39)$, mínimo relativo en $(1,58, -0,38)$.

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

✓ Cóncava en $(-\infty, 1)$, convexa en $(1, +\infty)$.

Apartado b)**Apartado c)**

Como la curva corta el eje en $x = 0, 1, 2$, calculamos el área en valor absoluto en cada tramo:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} \quad \int_1^2 f(x) dx = -\frac{1}{4}$$

✓ Área = $\left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$ unidad cuadrada.

⇒ **Error común:** Sumar directamente las dos integrales sin tomar valores absolutos, obteniendo 0 en lugar del área real (las dos regiones están a distinto lado del eje X).

BLOQUE B · Ejercicio 4

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día. La función $v(t)$ nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t , medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función $v(t)$ se conoce que su variación instantánea es

$$v'(t) = t^2 - 5t + 6, \quad t \in [0, 6]$$

a) [0,75 puntos] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función v .

b) [0,75 puntos] Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0) = 10$, halle la función v .

c) [0,5 puntos] Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante $t = 2$ y posteriormente las vendió en el instante $t = 4$, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) [0,5 puntos] ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

Resolución**Apartado a)**

$$v'(t) = (t - 2)(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 2, 3$$

✓ **Creciente en $(0, 2) \cup (3, 6)$, decreciente en $(2, 3)$.**

Apartado b)

$$v(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t + C \quad v(0) = 10 \Rightarrow C = 10$$

✓ $v(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t + 10.$

Apartado c)

$$v(2) = \frac{44}{3} \quad v(4) = \frac{46}{3}$$

$$\text{Ganancia} = 3000 \left(\frac{46}{3} - \frac{44}{3} \right) = 3000 \times \frac{2}{3} = 2000$$

✓ **Ganancia de 2000€.**

Apartado d)

Comparamos los valores clave: $v(0) = 10$ (mínimo absoluto), $v(2) = 14,67$, $v(3) = 14,5$, $v(6) = 28$ (máximo absoluto).

✓ **Comprar en $t = 0$ (apertura) y vender en $t = 6$ (cierre): ganancia máxima**
 $= 3000 \times (28 - 10) = 54000\text{€}$.

⇒ **Error común:** Buscar el máximo y mínimo únicamente entre los puntos críticos ($t = 2, 3$) sin comprobar también los extremos del dominio ($t = 0, t = 6$), que es precisamente donde están el mínimo y el máximo absolutos.

BLOQUE C · Ejercicio 5

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

- a) [0,5 puntos] Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.
- b) [0,75 puntos] Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.
- c) [0,5 puntos] Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.
- d) [0,75 puntos] Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

Resolución

$$P(\text{cara}) + P(\text{cruz}) = 1 \text{ y } P(\text{cara}) = 2P(\text{cruz}) \Rightarrow P(\text{cara}) = \frac{2}{3}, P(\text{cruz}) = \frac{1}{3}.$$

Apartado a)

$$\checkmark \quad P(\text{cara}) = \frac{2}{3}.$$

Apartado b)

$$P(\text{una cara, una cruz}) = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\checkmark \quad P = \frac{4}{9} \approx 0,444.$$

Apartado c)

$$P(\text{al menos una cara}) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\checkmark \quad P = \frac{8}{9} \approx 0,889.$$

Apartado d)

$$P(2 \text{ caras} / \text{al menos 1 cara}) = \frac{(2/3)^2}{8/9} = \frac{4/9}{8/9} = \frac{1}{2}$$

$$\checkmark \quad P = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Calcular $P(2 \text{ caras})$ dividiendo entre 1 en lugar de entre $P(\text{al menos una cara})$: al ser una probabilidad condicionada, el denominador es la condición, no el total.

BLOQUE C · Ejercicio 6

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra “lottery” ha aparecido en el 40 % de los correos que son spam y en el 0,6 % de los correos que no lo son.

a) [1,25 puntos] Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra “lottery” sea spam.

b) [0,5 puntos] Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra “lottery” no sea spam.

c) [0,75 puntos] Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra “lottery” y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

Resolución

$$P(\text{spam}) = 0,20, P(\text{lottery}/\text{spam}) = 0,40, P(\text{lottery}/\text{no spam}) = 0,006.$$

Apartado a)

$$P(\text{lottery}) = 0,40(0,20) + 0,006(0,80) = 0,0848$$

$$P(\text{spam}/\text{lottery}) = \frac{0,08}{0,0848} \approx 0,9434$$

$$\checkmark \quad P(\text{spam}/\text{lottery}) \approx 0,9434.$$

Apartado b)

$$P(\text{no lottery}) = 0,60(0,20) + 0,994(0,80) = 0,9152$$

$$P(\text{no spam}/\text{no lottery}) = \frac{0,7952}{0,9152} \approx 0,8689$$

$$\checkmark \quad P(\text{no spam}/\text{no lottery}) \approx 0,8689.$$

Apartado c)

$$P(\text{incorrecto}) = P(\text{lottery} \cap \text{no spam}) + P(\text{no lottery} \cap \text{spam}) = 0,006(0,8) + 0,6(0,2) = 0,1248$$

$$\checkmark \quad P(\text{etiquetado incorrecto}) = 0,1248.$$

BLOQUE D · Ejercicio 7

a) [1,25 puntos] Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.

b) En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6,4 puntos con una desviación típica de 0,7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.

b1) [0,25 puntos] Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.

b2) [1 punto] Calcule la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6,3 y 6,8 puntos.

Resolución**Apartado a)**

$$N = 250 + 300 + 400 + 350 = 1300 \quad r = \frac{20}{250} = 0,08$$

✓ **Población** $N = 1300$. **Muestra total** $n = 104$: $E_1 = 20$, $E_2 = 24$, $E_3 = 32$, $E_4 = 28$.

Apartado b1)

$$✓ \quad \bar{X} \sim N\left(6,4, \frac{0,7}{\sqrt{49}}\right) = N(6,4, 0,1).$$

Apartado b2)

$$z_1 = \frac{6,8 - 6,4}{0,1} = 4 \quad z_2 = \frac{6,3 - 6,4}{0,1} = -1$$
$$P = \Phi(4) - \Phi(-1) = 0,99997 - 0,1587 = 0,8413$$

$$✓ \quad P(6,3 < \bar{X} < 6,8) = 0,8413.$$

BLOQUE D · Ejercicio 8

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) [1,25 puntos] Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98 %, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

b) [1,25 puntos] Si el nivel de confianza es del 95 %, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

Resolución

$$\hat{p} = \frac{64}{400} = 0,16.$$

Apartado a)

Para el 98 %: $\Phi(z) = 0,99$; interpolando entre $\Phi(2,32) = 0,9898$ y $\Phi(2,33) = 0,9901$: $z \approx 2,325$.

$$E = 2,325 \sqrt{\frac{0,16 \times 0,84}{400}} \approx 0,0426$$

✓ **IC 98 %:** (0,1174, 0,2026).

Apartado b)

Para el 95 %: $z = 1,96$ (tabla exacta).

$$E = 1,96 \sqrt{\frac{0,16 \times 0,84}{400}} \approx 0,0359$$

✓ **Error máximo $\approx 0,0359$ (3,59 %).** Al disminuir el nivel de confianza, el error disminuye (menor z).

⇒ **Error común:** Usar el mismo z del apartado anterior en lugar de recalcularlo para el nuevo nivel de confianza del 95 %.

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas CCSS · Junio 2023