
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2020 (Ordinaria) · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D). En cada bloque se elige un único ejercicio entre los dos propuestos (162, 364, 566, 768). Se incluye la resolución de **todos** los ejercicios para cubrir ambas opciones de cada bloque.

BLOQUE A · Ejercicio 1

Sean A , B , X , Y matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

a) [1 punto] Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) [1,5 puntos] Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y .

Resolución**Apartado a)**

De $A \cdot X = B$: $X = A^{-1}B$. De $B \cdot Y = A$: $Y = B^{-1}A$.

$$Y^{-1} = (B^{-1}A)^{-1} = A^{-1}(B^{-1})^{-1} = A^{-1}B = X$$

✓ Queda probado que $Y^{-1} = X$.

Apartado b)

$$X = A^{-1}B \quad Y = B^{-1}A$$

$$\checkmark \quad X = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

⇒ **Error común:** Confundir el orden de la ecuación matricial al despejar X e Y : como el producto de matrices no es conmutativo, hay que multiplicar por la inversa siempre por el mismo lado.

BLOQUE A · Ejercicio 2

a) [1 punto] Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

b) [1,5 puntos] Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

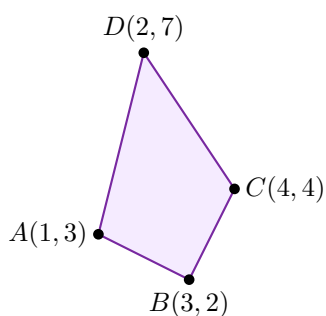
$$x + 2y \geq 7 \quad 4x - y \geq 1 \quad 2x - y \leq 4 \quad 3x + 2y \leq 20 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

Resolución**Apartado a)**

Sea x = horas cadena A, y = horas cadena B. Minimizar $F(x, y) = 1200x + 1500y$.

✓ **Restricciones:** $10x + 7y \geq 400$, $5x + 6y \geq 280$, $x \leq 2y$, $x, y \geq 0$. **Minimizar** $F(x, y) = 1200x + 1500y$.

Apartado b)

Vértice	$F = 2x + y$
$A(1, 3)$	5
$B(3, 2)$	8
$C(4, 4)$	12
$D(2, 7)$	11

✓ Mínimo en $A(1, 3)$, vale 5.

BLOQUE B · Ejercicio 3

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

a) [1 punto] Determine los valores a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2, 36)$.

b) [0,75 puntos] Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.

c) [0,75 puntos] Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

Resolución**Apartado a)**

$$f(2) = 36: 8a + 2b + 4 = 36. \quad f'(2) = 0: 12a + b = 0.$$

$$\checkmark \quad a = -2, \quad b = 24.$$

Apartado b)

$$\text{Para } a = 4, b = -3: f(x) = 4x^3 - 3x + 4. \quad f'(x) = 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}.$$

$\checkmark$ **Creciente en $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$, decreciente en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Máximo relativo en $(-\frac{1}{2}, 5)$, mínimo relativo en $(\frac{1}{2}, 3)$.**

Apartado c)

$$F(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C \quad F(2) = 10 \Rightarrow C = -8$$

$$\checkmark \quad F(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 8.$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar la constante de integración C y no usar la condición $F(2) = 10$ para determinarla.

BLOQUE B · Ejercicio 4

a) [1,2 puntos] Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (-5 + x^2)^2 \cdot e^{3x} \quad g(x) = \frac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2}$$

b) [1,3 puntos] Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ y el eje de abscisas.

Resolución**Apartado a)**

$$\checkmark \quad f'(x) = e^{3x}(x^2 - 5)(3x^2 + 4x - 15).$$

Con $u = \ln(x^3 - 5x)$, $u' = \frac{3x^2 - 5}{x^3 - 5x}$; $v = 1 - x^2$, $v' = -2x$:

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Apartado b)

$h(x) = -x^2 + 2x + 3$: raíces $x = -1, 3$.

$$A = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{32}{3}$$

$$\checkmark \quad \text{Área} = \frac{32}{3} \approx 10,67 \text{ unidades cuadradas.}$$

BLOQUE C · Ejercicio 5

A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

- a) [0,6 puntos] Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.
- b) [0,6 puntos] Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.
- c) [0,6 puntos] Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.
- d) [0,7 puntos] Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

Resolución**Apartado a)**

$$P(1 \cup 2) = \frac{46 + 34 - 16}{120} = \frac{8}{15} \approx 0,533$$

$$\checkmark \quad P(1 \cup 2) = \frac{8}{15} \approx 0,533.$$

Apartado b)

$$\checkmark \quad P(\text{ninguno}) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} \approx 0,467.$$

Apartado c)

$$\checkmark \quad P(\text{solo } 1) = \frac{46 - 16}{120} = 0,25.$$

Apartado d)

$$P(1/\text{no } 2) = \frac{0,25}{1 - 34/120} = \frac{15}{43} \approx 0,349$$

$$\checkmark \quad P(1/\text{no } 2) \approx 0,349.$$

BLOQUE C · Ejercicio 6

Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30 % de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E_1 y el resto por una empresa E_2 . De las bicicletas de la empresa E_1 , el 80 % son de buena calidad, el 5 % de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60 % son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

- a) [1 punto] Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.
- b) [0,75 puntos] Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.
- c) [0,75 puntos] Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19 %, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2 ?

Resolución**Apartado a)**

$$P(\text{buena}) = 0,3(0,8) + 0,7(0,6) = 0,66$$

$$\checkmark \quad P(\text{buena}) = 0,66.$$

Apartado b)

$$\checkmark \quad P(E_1 \cap \text{mala}) = 0,3 \times 0,15 = 0,045.$$

Apartado c)

$$0,19 = 0,3(0,05) + 0,7 \cdot x \Rightarrow x = 0,25$$

$$\checkmark \quad P(\text{media}/E_2) = 0,25.$$

BLOQUE D · Ejercicio 7

La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuye según una ley Normal de varianza 7,84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9,5 9 10,2 8,6 11,4 10,8 12,6 11 11,8 14,5 10,4 9,8

a) [1,5 puntos] Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93,5 % para estimar la vida útil media de estas lavadoras.

b) [1 punto] Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99 %.

Resolución

$$\sigma = \sqrt{7,84} = 2,8.$$

Apartado a)

Media = 10,8. Con $z = 1,845$ (93,5 %):

$$E = 1,845 \times \frac{2,8}{\sqrt{12}} \approx 1,491$$

✓ **IC 93,5 %:** (9,309, 12,291).

Apartado b)

Con $z = 2,575$ (99 %):

$$E = 2,575 \times \frac{2,8}{\sqrt{50}} \approx 1,02$$

✓ **Error máximo** $\approx 1,02$ años.

BLOQUE D · Ejercicio 8

La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ .

a) [1 punto] Si se desea que en el 99 % de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?

b) [0,5 puntos] Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria “Renta media anual muestral”?

c) [1 punto] Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

Resolución**Apartado a)**

Con $z = 2,575$ (99 %) y $E < 1$:

$$n \geq (2,575 \times 5)^2 \approx 165,9$$

✓ $n_{\min} = 166$.

Apartado b)

✓ $\bar{X} \sim N(\mu, 0,5)$.

Apartado c)

Con $\mu = 24$: $z = \frac{25 - 24}{0,5} = 2$

$$P(\bar{X} > 25) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

✓ $P(\bar{X} > 25) = 0,0228$.

⇒ **Error común:** Olvidar dividir σ entre $\sqrt{n}$ al pasar de la variable individual a la media muestral.

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas CCSS · Junio 2020