
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos
Julio 2024 (Extraordinaria) · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D). En cada bloque se elige un único ejercicio entre los dos propuestos (162, 364, 566, 768). Se incluye la resolución de **todos** los ejercicios para cubrir ambas opciones de cada bloque.

BLOQUE A · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2 \cdot X + A^4 = A$.

Resolución

Despejamos X multiplicando por $(A^2)^{-1} = A^{-2}$ en ambos miembros (por la izquierda):

$$A^2 X = A - A^4 \Rightarrow X = A^{-2} \cdot A - A^{-2} \cdot A^4 = A^{-1} - A^2$$

Calculamos A^{-1} y A^2 y restamos:

$$\checkmark \quad X = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{40}{9} \\ \frac{40}{9} & \frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{38}{9} & \frac{40}{9} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Despejar mal el orden de la ecuación matricial: como el producto de matrices no es conmutativo, hay que multiplicar por la inversa consistentemente por el mismo lado en ambos términos de la ecuación.

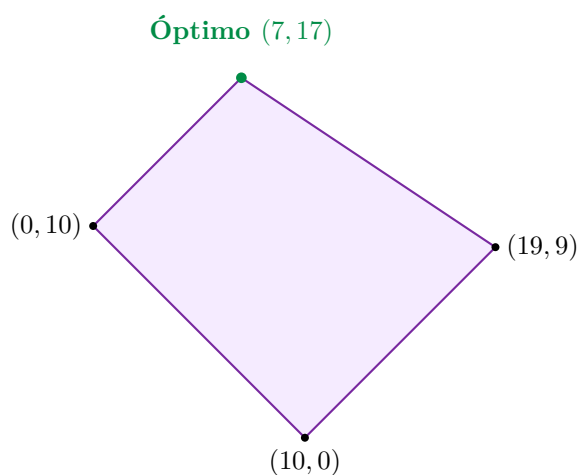
BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

Resolución

Sea x = anuncios de radio, y = anuncios de televisión. Función objetivo (audiencia a **maximizar**): $P(x, y) = 34000x + 72000y$.

Restricciones: $2400x + 3600y \leq 78000$, $|x - y| \leq 10$, $x + y \geq 10$, $x, y \geq 0$.



Vértice	$P = 34000x + 72000y$
(10, 0)	340000
(19, 9)	1294000
(7, 17)	1462000
(0, 10)	720000

✓ **7 anuncios de radio y 17 de televisión. Audiencia máxima: 1462000 personas.**

⇒ **Error común:** Olvidar que la restricción $|x - y| \leq 10$ genera **dos** inecuaciones ($x - y \leq 10$ e $y - x \leq 10$), no una sola.

BLOQUE B · Ejercicio 3

Dada la función $f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$

a) [0,75 puntos] Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.

b) [0,75 puntos] Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.

c) [1 punto] Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

Resolución**Apartado a)**

Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$. La función es continua y derivable en todo su dominio.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{-2}{0^{\pm}} = \mp \infty \Rightarrow x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-6}{2-x} = -2 \Rightarrow y = -2 \text{ es asíntota horizontal}$$

✓ Continua y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$. A.V.: $x = 2$. A.H.: $y = -2$.

Apartado b)

$$f'(x) = \frac{2(2-x) - (2x-6)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4-2x+2x-6}{(2-x)^2} = \frac{-2}{(2-x)^2}$$

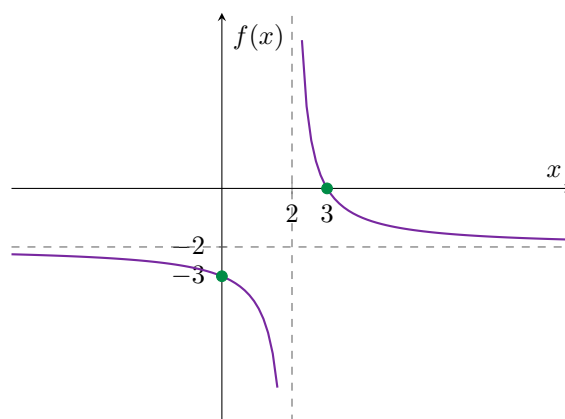
Como $(2-x)^2 > 0$ siempre, $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 2$: la derivada nunca se anula.

✓ f es decreciente en $(-\infty, 2)$ y en $(2, +\infty)$. No tiene extremos relativos.

Apartado c)

Corte con eje Y: $f(0) = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow (0, -3)$.

Corte con eje X: $2x-6=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow (3, 0)$.



✓ Corta los ejes en $(0, -3)$ y $(3, 0)$.

⇒ **Error común:** Olvidar que la función tiene dos ramas separadas por la asíntota vertical $x = 2$, e intentar dibujarla como una única curva continua.

BLOQUE B · Ejercicio 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- a) [0,75 puntos] Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) [0,75 puntos] Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
c) [1 punto] Represente la región del plano limitada por la gráfica de f , las rectas $x = 3$, $x = 5$ y el eje de abscisas. Calcule su área.

Resolución**Apartado a)**

$$\begin{aligned} f(4^-) &= -16 + 16 + 3 = 3 & f(4) &= 2(4) - 5 = 3 \Rightarrow \text{continua} \\ f'(4^-) &= -2(4) + 4 = -4 & f'(4^+) &= 2 \Rightarrow \text{no coinciden} \end{aligned}$$

✓ f es continua en $x = 4$, pero no derivable.

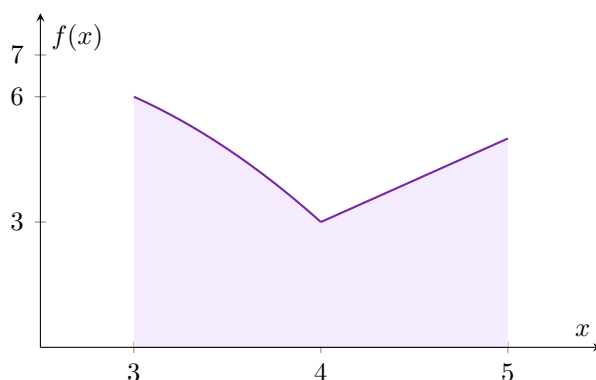
Apartado b)

Tramo 1: $f'(x) = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. Creciente en $(-\infty, 2)$, decreciente en $(2, 4)$.
Tramo 2: $f'(x) = 2 > 0$ siempre. Creciente en $[4, +\infty)$.

✓ **Máximo relativo en $x = 2$ ($f(2) = 7$). Mínimo relativo en $x = 4$ ($f(4) = 3$).**

Apartado c)

Como $f(x) > 0$ en todo $[3, 5]$ (comprobamos $f(3) = 6 > 0$ y $f(5) = 5 > 0$, sin anularse en medio), el área es directamente la integral:



$$\begin{aligned} A &= \int_3^4 (-x^2 + 4x + 3) dx + \int_4^5 (2x - 5) dx \\ \int_3^4 (-x^2 + 4x + 3) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right]_3^4 = \frac{68}{3} - 18 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$\int_4^5 (2x - 5)dx = \left[x^2 - 5x \right]_4^5 = 0 - (-4) = 4$$

✓ **Área** = $\frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3} \approx 8,67$ **unidades cuadradas.**

⇒ **Error común:** Olvidar trocear la integral en los dos tramos donde f tiene expresiones distintas (el cambio de tramo ocurre precisamente en $x = 4$, dentro del intervalo $[3, 5]$).

BLOQUE C · Ejercicio 5

El 7 % de los habitantes de una ciudad no tienen ni coche ni moto. De entre los que tienen coche el 36 % tienen moto y de entre los que no tienen coche el 28 % no tienen moto. Se elige al azar un habitante de esa ciudad:

- a) [1 punto] Calcule la probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos.
- b) [0,5 puntos] Calcule la probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos.
- c) [0,5 puntos] Si tiene coche, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga moto?
- d) [0,5 puntos] ¿Son independientes los sucesos “tener coche” y “no tener moto”? ¿Son incompatibles?

Resolución

De $(1 - P(C)) \times 0,28 = 0,07 \Rightarrow P(C) = 0,75$.

Completamos la tabla de contingencia (por cada 100 habitantes): con coche y moto = 27, con coche y sin moto = 48, sin coche y con moto = 18, sin coche y sin moto = 7.

Apartado a)

$$P(\text{solo uno}) = \frac{48 + 18}{100} = 0,66$$

✓ $P(\text{solo un vehículo}) = 0,66$.

Apartado b)

$$P(\text{al menos uno}) = 1 - 0,07 = 0,93$$

✓ $P(\text{al menos uno}) = 0,93$.

Apartado c)

$$P(\text{no moto/coche}) = \frac{48}{75} = 0,64$$

✓ $P(\text{no moto/coche}) = 0,64$.

Apartado d)

$$P(C) \times P(\bar{M}) = 0,75 \times 0,55 = 0,4125 \neq 0,48 = P(C \cap \bar{M}) \Rightarrow \text{no independientes}$$

Como $P(C \cap \bar{M}) = 0,48 \neq 0$, sí son **compatibles**.

✓ **No independientes. Sí compatibles.**

⇒ **Error común:** Calcular $P(\bar{M})$ olvidando sumar las dos casillas de la tabla en las que no hay moto (con coche y sin coche).

BLOQUE C · Ejercicio 6

Se ha realizado un estudio a personas que están teletrabajando actualmente. De estos, el 72 % trabajan por cuenta ajena con contrato indefinido, el 11 % lo hacen por cuenta ajena con contrato temporal y el resto trabajan por cuenta propia. El 87 % de los que tienen contrato indefinido y el 86 % de los que trabajan por cuenta propia piensan que el teletrabajo mejora la conciliación familiar. Además, este estudio ha revelado que el 12,51 % de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar. Seleccionado un teletrabajador al azar, determine la probabilidad de que:

a) [1,5 puntos] Opine que el teletrabajo sí mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal.

b) [1 punto] No esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar.

Resolución

$P(\text{indefinido}) = 0,72$, $P(\text{temporal}) = 0,11$, $P(\text{propia}) = 0,17$. $P(\text{mejora}) = 1 - 0,1251 = 0,8749$.

Apartado a)

Por el teorema de la probabilidad total:

$$0,8749 = 0,72(0,87) + 0,11 \cdot x + 0,17(0,86) \Rightarrow x = 0,93$$

✓ $P(\text{mejora/temporal}) = 0,93$.

Apartado b)

$$P(\text{propia/mejora}) = \frac{0,17 \times 0,86}{0,8749} \approx 0,1671$$

$$P(\text{no propia/mejora}) = 1 - 0,1671 \approx 0,8329$$

✓ $P(\text{no propia/mejora}) \approx 0,8329$.

⇒ **Error común:** Olvidar que $P(\text{propia}) = 1 - 0,72 - 0,11 = 0,17$ (dato deducido, no directo).

BLOQUE D · Ejercicio 7

La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica 22 cm.

a) [1 punto] ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?

b) [0,5 puntos] ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50 % de las más altas?

c) [1 punto] Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.

Resolución**Apartado a)**

$$z = \frac{10}{22} = 0,4545 \rightarrow 0,45 \text{ (redondeado, tabla directa)} \quad \Phi(0,45) = 0,6736$$

$$P(135 < X < 155) = 2(0,6736) - 1 = 0,3472$$

✓ Aproximadamente el 34,72 % de las plantas.

Apartado b)

Por simetría de la normal, el 50 % superior comienza exactamente en la media.

✓ 145 cm.

Apartado c)

$$\text{Con } n = 16: \bar{X} \sim N\left(145, \frac{22}{\sqrt{16}}\right) = N(145, 5,5).$$

$$z_{151} = \frac{151 - 145}{5,5} \approx 1,09 \quad z_{140} = \frac{140 - 145}{5,5} \approx -0,91$$

$$P(140 < \bar{X} < 151) = \Phi(1,09) - [1 - \Phi(0,91)] = 0,8621 - 0,1814 = 0,6807$$

✓ $P(140 < \bar{X} < 151) = 0,6807$.

⇒ **Error común:** Olvidar dividir σ entre $\sqrt{n}$ al pasar de la variable individual a la media muestral.

BLOQUE D · Ejercicio 8

Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.

a) [1,25 puntos] Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97 %, para estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota.

b) [1,25 puntos] Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2 %?

Resolución

$$\hat{p} = \frac{12}{300} = 0,04.$$

Apartado a)

Con $z = 2,17$ (97 %):

$$E = 2,17 \sqrt{\frac{0,04 \times 0,96}{300}} \approx 0,0245$$

✓ **IC 97 %:** (0,0155, 0,0645).

Apartado b)

Con $z = 1,96$ (95 %) y $E \leq 0,02$:

$$n \geq \frac{1,96^2 \times 0,04 \times 0,96}{0,02^2} \approx 368,79$$

✓ $n_{\min} = 369$ viajeros.

⇒ **Error común:** Redondear hacia abajo (368) en lugar de hacia arriba: como se exige que el error sea *a lo sumo* del 2 %, hay que redondear siempre al entero superior.