
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos
Julio 2023 (Extraordinaria) · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D). En cada bloque se elige un único ejercicio entre los dos propuestos (162, 364, 566, 768). Se incluye la resolución de **todos** los ejercicios para cubrir ambas opciones de cada bloque.

BLOQUE A · Ejercicio 1

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Pruebe que se verifica que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)$.

b) [1 punto] Dada la ecuación matricial $X^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

Resolución**Apartado a)**

Calculamos A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-4+5 & 0 & 0 \\ 0 & 4-8+5 & 0 \\ 0 & -3+4 & 1-4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando A^{-1} directamente por la matriz adjunta se obtiene la misma matriz.

✓ **Queda probado:** $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$

Apartado b)

Como A es 3×3 y el producto resultante es 2×3 , X^t debe ser 2×3 , luego X tiene dimensión 3×2 .

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

✓ **X tiene dimensión 3×2 :** $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

⇒ **Error común:** Olvidar que es X^t (no X) la que multiplica a A en la ecuación original; hay que resolver para X^t y trasponer al final para obtener X .

BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semi-preciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad. Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad. Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana. Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21 €, el segundo a 50 € y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?

Resolución

Sea x = anillos tipo 1, y = anillos tipo 2. Maximizar $F(x, y) = 21x + 50y$.

Restricciones: $20x + 50y \geq 1900$, $x + 3y \leq 200$, $2x + y \leq 150$, $x \geq 20$, $y \geq 0$.

Vértice	$F = 21x + 50y$
$A(20, 30)$	1920
$B(70, 10)$	1970
$C(50, 50)$	3550
$D(20, 60)$	3420

✓ 50 anillos tipo 1 y 50 anillos tipo 2. Valor máximo de la venta: 3550 €.

⇒ **Error común:** Olvidar la restricción $x \geq 20$ (mínimo de anillos tipo 1 a fabricar) al calcular los vértices de la región factible.

BLOQUE B · Ejercicio 3

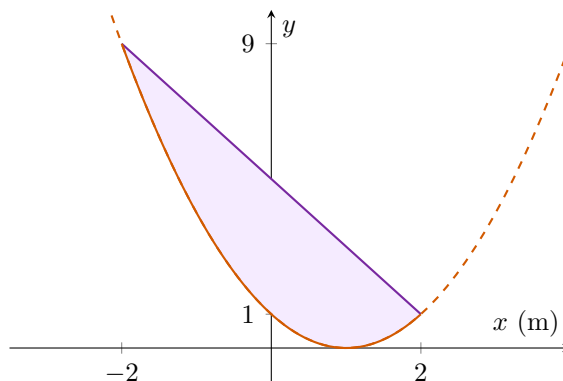
El área quemada de la región plana de la cubierta de plástico de un invernadero, coincide con el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = (x - 1)^2$ y $g(x) = 5 - 2x$, donde x está expresado en metros.

a) [1 punto] Represente gráficamente la zona deteriorada.

b) [1,5 puntos] Para reparar la región quemada, se ha de utilizar plástico cuyo coste es de 15 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido, ¿cuánto costará el plástico comprado?

Resolución**Apartado a)**

Intersecciones: $(x - 1)^2 = 5 - 2x \Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x = \pm 2$.



✓ **Zona deteriorada: región entre $x = -2$ y $x = 2$ donde $g(x) > f(x)$.**

Apartado b)

$$A = \int_{-2}^2 [(5 - 2x) - (x - 1)^2] dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3} \text{ m}^2$$

Como se desperdicia $1/3$ del plástico comprado (solo se aprovechan $2/3$):

$$\text{Plástico comprado} = \frac{32/3}{2/3} = 16 \text{ m}^2$$

✓ **Coste = $16 \times 15 = 240$ €.**

⇒ **Error común:** Calcular el área correctamente pero multiplicar por $1/3$ en lugar de dividir entre $2/3$ al ajustar por el desperdicio.

BLOQUE B · Ejercicio 4

Sea la función $f(t) = \frac{12t - 24}{t + 3}$, $t \geq 0$.

a) [1,5 puntos] Represente gráficamente la función f , determinando los puntos de corte con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, y estudiando la monotonía y la curvatura de f .

b) Si la función f representa los beneficios de una empresa, en millones de euros, donde t indica los años de vida de la empresa:

b1) [0,5 puntos] ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas? Justifique la respuesta.

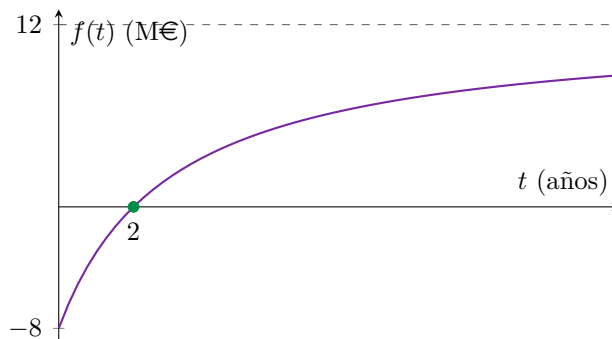
b2) [0,5 puntos] A medida que pasan los años, ¿están limitados los beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

Resolución**Apartado a)**

Corte X : $t = 2 \Rightarrow (2, 0)$. Corte Y : $f(0) = -8 \Rightarrow (0, -8)$.

Asíntota vertical en $t = -3$, pero fuera del dominio ($t \geq 0$): no aplica. Asíntota horizontal: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 12 \Rightarrow y = 12$.

$$f'(t) = \frac{60}{(t+3)^2} > 0 \text{ siempre} \quad f''(t) = \frac{-120}{(t+3)^3} < 0 \text{ siempre}$$



✓ Corta en $(2, 0)$ y $(0, -8)$. A.H.: $y = 12$. Creciente y cóncava en todo $[0, +\infty)$.

Apartado b1)

Como f es creciente y corta el eje X en $t = 2$ (pasando de negativo a positivo):

✓ La empresa deja de tener pérdidas a partir del año 2.

Apartado b2)

Como f tiene asíntota horizontal $y = 12$:

✓ Sí, los beneficios están limitados: el límite es 12 millones de euros, precisamente por la asíntota horizontal.

⇒ **Error común:** Confundir la existencia de asíntota vertical: aunque la expresión tiene un polo en $t = -3$, ese valor queda fuera del dominio del problema ($t \geq 0$), por lo que no hay asíntota vertical relevante.

BLOQUE C · Ejercicio 5

Una caja contiene 3 fichas verdes, 2 fichas azules y 4 fichas rojas. Un juego consiste en realizar dos extracciones, sin reemplazamiento, de tal manera que el jugador que saque dos fichas azules gana el primer premio, el jugador que saque dos fichas verdes gana el segundo premio y el jugador que, de las dos fichas, una sea azul y otra de un color diferente gana el tercer premio.

a) [0,75 puntos] Calcule la probabilidad de que un jugador consiga el primer o el segundo premio.

b) [0,75 puntos] Calcule la probabilidad de que un jugador gane el tercer premio.

c) [1 punto] Sabiendo que un jugador ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya ganado el tercer premio?

Resolución**Apartado a)**

$$P(1er) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36} \quad P(2do) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{12}$$
$$P(1er \text{ o } 2do) = \frac{1}{36} + \frac{1}{12} = \frac{1}{9}$$

$$\checkmark \quad P(1er \text{ o } 2do \text{ premio}) = \frac{1}{9}.$$

Apartado b)

$$P(3er) = \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{18}$$

$$\checkmark \quad P(3er \text{ premio}) = \frac{7}{18}.$$

Apartado c)

$$P(\text{premio}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{7}{18} = \frac{1}{2}$$
$$P(3er/\text{premio}) = \frac{7/18}{1/2} = \frac{7}{9}$$

$$\checkmark \quad P(3er \text{ premio}/\text{premio}) = \frac{7}{9}.$$

⇒ **Error común:** Calcular las probabilidades como si la extracción fuera con reemplazamiento (multiplicando siempre por la misma fracción), olvidando que tras la primera extracción quedan 8 fichas en total.

BLOQUE C · Ejercicio 6

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$ y $P(A/B) = 0,6$. Se pide:

- a) [0,5 puntos] $P(A \cup B)$
- b) [0,75 puntos] $P(A - B) + P(B - A)$
- c) [0,75 puntos] $P(B/A^c)$
- d) [0,5 puntos] Razone si los sucesos A y B son independientes. ¿Son incompatibles?

Resolución

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0,6 \times 0,3 = 0,18.$$

Apartado a)

$$P(A \cup B) = 0,6 + 0,3 - 0,18 = 0,72$$

$$\checkmark \quad P(A \cup B) = 0,72.$$

Apartado b)

$$P(A - B) + P(B - A) = (0,6 - 0,18) + (0,3 - 0,18) = 0,42 + 0,12 = 0,54$$

$$\checkmark \quad P(A - B) + P(B - A) = 0,54.$$

Apartado c)

$$P(B/A^c) = \frac{0,3 - 0,18}{1 - 0,6} = \frac{0,12}{0,4} = 0,3$$

$$\checkmark \quad P(B/A^c) = 0,3.$$

Apartado d)

$$P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,3 = 0,18 = P(A \cap B) \Rightarrow \text{independientes}$$

Como $P(A \cap B) = 0,18 \neq 0$, no son incompatibles (son **compatibles**).

$$\checkmark \quad \text{Sí independientes. No incompatibles (compatibles).}$$

BLOQUE D · Ejercicio 7

a) [1 punto] Un gimnasio establece sus tarifas por grupos de edad: juvenil, adulto y senior. Tiene matriculados 25 juveniles, 75 adultos y 50 seniors. Se quiere seleccionar una muestra de 30 personas del gimnasio utilizando un muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

b) [1,5 puntos] Dada la población $\{9, 11, 13, 18, 20\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.

Resolución**Apartado a)**

$$\text{Total} = 25 + 75 + 50 = 150. \text{ Razón} = \frac{30}{150} = 0,2.$$

✓ **Muestra: 5 juveniles, 15 adultos, 10 seniors.**

Apartado b)

$$\mu = \frac{9 + 11 + 13 + 18 + 20}{5} = 14,2 \quad \sigma^2 = 17,36$$
$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{17,36}{2} = 8,68$$

✓ **Varianza de las medias muestrales = 8,68.**

⇒ **Error común:** Dividir la varianza poblacional entre $n - 1$ en lugar de entre n al pasar a la varianza de las medias muestrales.

BLOQUE D · Ejercicio 8

En el otoño de 2021, el municipio de El Paso en la Isla de La Palma sufrió la erupción del volcán Cumbre Vieja. Al finalizar la erupción, se escogió una muestra de 500 casas resultando que 325 de ellas estaban afectadas por la erupción.

a) [1,25 puntos] Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 97 %, para estimar la proporción de casas afectadas por la erupción del volcán. Según el resultado obtenido, ¿se puede admitir que el porcentaje de casas afectadas por el volcán es del 64 %?

b) [1,25 puntos] Para un nivel de confianza del 92 % y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo de estimación sea del 2 %?

Resolución

$$\hat{p} = \frac{325}{500} = 0,65.$$

Apartado a)

Con $z = 2,17$ (97 %):

$$E = 2,17 \sqrt{\frac{0,65 \times 0,35}{500}} \approx 0,0463$$

✓ **IC 97 %:** (0,6037, 0,6963).

Como 0,64 pertenece al intervalo:

✓ **Sí, se puede admitir que el porcentaje de casas afectadas es del 64 %.**

Apartado b)

Con $z = 1,75$ (92 %) y $E \leq 0,02$:

$$n \geq \frac{1,75^2 \times 0,65 \times 0,35}{0,02^2} \approx 1741,80$$

✓ $n_{\min} = 1742$ casas.

⇒ **Error común:** Redondear hacia abajo (1741) en lugar de hacia arriba: como se exige un error máximo dado, hay que garantizarlo redondeando siempre al entero superior.