
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos
Julio 2022 (Extraordinaria) · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D). En cada bloque se elige un único ejercicio entre los dos propuestos (162, 364, 566, 768). Se incluye la resolución de **todos** los ejercicios para cubrir ambas opciones de cada bloque.

BLOQUE A · Ejercicio 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

b) [1 punto] Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que $A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$

Resolución**Apartado a)**

$$A \cdot X + B = A^2 \cdot C \Rightarrow X = A^{-1}(A^2 C - B)$$

$$\checkmark \quad X = \begin{pmatrix} -7/3 & 19/3 \\ -13/3 & 10/3 \\ 10/3 & -13/3 \end{pmatrix}.$$

Apartado b)

$A \cdot P^t$ debe ser 3×2 (para poder sumar con C): como A es 3×3 , P^t es $3 \times 2 \Rightarrow P$ es 2×3 .

$C \cdot (Q \cdot B)$ debe ser 3×2 : como C es 3×2 , $Q \cdot B$ debe ser 2×2 ; como B es 3×2 , Q debe ser 2×3 .

✓ P tiene dimensión 2×3 . Q tiene dimensión 2×3 .

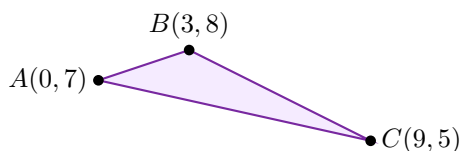
$\Rightarrow$ **Error común:** Confundir la dimensión de P con la de P^t : hay que trasponer al final para obtener la dimensión de P , no de P^t .

BLOQUE A · Ejercicio 2

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y - 2x \leq 7; \quad -x + 3y \leq 21; \quad x + 2y \leq 19; \quad x + y \leq 14$$

- a) [1,4 puntos] Represente dicho recinto y determine sus vértices.
b) [0,6 puntos] Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = x + 4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.
c) [0,5 puntos] ¿Podría tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

Resolución**Apartado a)**

✓ Vértices: $A(0, 7)$, $B(3, 8)$, $C(9, 5)$ (región abierta hacia abajo).

Apartado b)

$$F(A) = 28 \quad F(B) = 35 \quad F(C) = 29$$

✓ Máximo en $B(3, 8)$, vale 35. No tiene mínimo (la región está abierta por abajo).

Apartado c)

El valor 40 supera el máximo absoluto (35), así que **no** puede tomarse. El valor 20 sí puede tomarse, ya que la región no tiene mínimo (F puede tomar valores tan bajos como se quiera al alejarse hacia abajo en la región abierta).

⇒ **Error común:** Olvidar que una región factible no acotada puede no tener mínimo (o máximo), y dar por hecho que siempre existen ambos extremos.

BLOQUE B · Ejercicio 3

a) [1 punto] Se considera la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x = \frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto $(-2, -3)$.

b) [1,5 puntos] Dada la función $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

Resolución**Apartado a)**

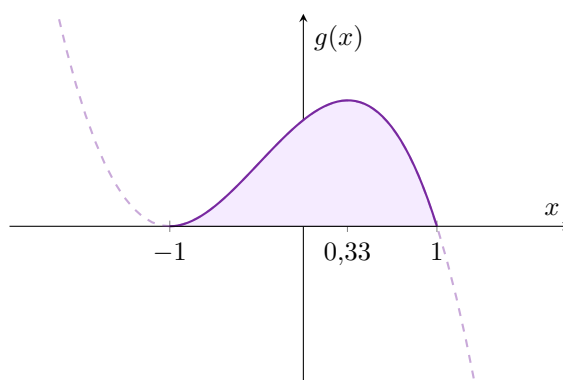
$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$. Imponemos $f'(1/3) = 0$ y $f(-2) = -3$:

✓ $b = 1, c = -1$.

Apartado b)

$g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1 = -(x-1)(x+1)^2$: raíces $x = -1$ (doble) y $x = 1$.

$g'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -(3x-1)(x+1)$: creciente en $(-1, \frac{1}{3})$, decreciente en $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$. Mínimo relativo en $(-1, 0)$, máximo relativo en $(\frac{1}{3}, \frac{32}{27})$.



$$A = \int_{-1}^1 (-x^3 - x^2 + x + 1) dx = \frac{4}{3}$$

✓ Área = $\frac{4}{3} \approx 1,33$ unidades cuadradas.

⇒ **Error común:** No darse cuenta de que $x = -1$ es raíz doble (la curva toca el eje pero no lo cruza ahí), integrando en un intervalo incorrecto.

BLOQUE B · Ejercicio 4

El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función:

$$B(x) = -0,02x^2 + 1,3x - 15, \quad x \geq 0$$

a) [0,75 puntos] Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX .

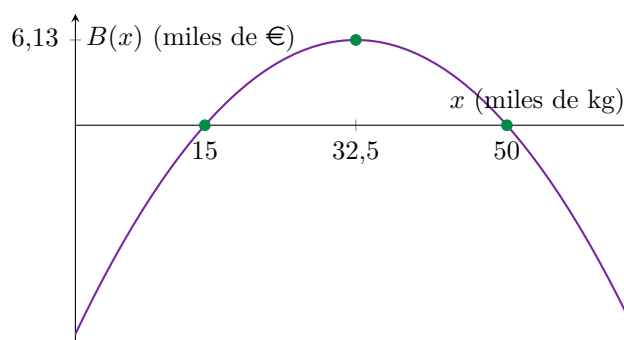
b) [0,5 puntos] ¿Para qué valores de x la finca no tiene pérdidas?

c) [0,5 puntos] ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?

d) [0,75 puntos] ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000 €?

Resolución**Apartado a)**

Raíces: $x = 15$, $x = 50$.



✓ Corta el eje OX en $(15, 0)$ y $(50, 0)$.

Apartado b)

✓ No tiene pérdidas para $15 \leq x \leq 50$ (entre 15000 y 50000 kg).

Apartado c)

Vértice: $x = 32,5 \Rightarrow B(32,5) = 6,125$

✓ Beneficio máximo: 6125 €, vendiendo 32500 kg.

Apartado d)

$$-0,02x^2 + 1,3x - 15 = 5 \Rightarrow x = 25 \text{ o } x = 40$$

✓ Debe vender 25000 kg o 40000 kg.

BLOQUE C · Ejercicio 5

En una determinada región hay tres universidades A , B y C . De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A , el 30 % de la universidad B y el resto de C . Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0,4 y para un estudiante de B es 0,5.

a) [1,5 puntos] Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0,395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) [1 punto] Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B .

Resolución

$P(A) = 0,60$, $P(B) = 0,30$, $P(C) = 0,10$. $P(\text{no trabajo}/A) = 0,4$, $P(\text{no trabajo}/B) = 0,5$.

Apartado a)

$$0,395 = 0,6(0,4) + 0,3(0,5) + 0,1(1 - x) \Rightarrow x = 0,95$$

✓ $P(\text{trabajo}/C) = 0,95$.

Apartado b)

$$P(A \cup B/\text{no trabajo}) = \frac{0,6(0,4) + 0,3(0,5)}{0,395} = \frac{0,39}{0,395} \approx 0,9873$$

✓ $P(A \cup B/\text{no trabajo}) \approx 0,9873$.

⇒ **Error común:** Olvidar que $P(C) = 1 - 0,6 - 0,3 = 0,1$ es un dato deducido, no directo.

BLOQUE C · Ejercicio 6

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{7}, \quad P(A^c) = \frac{5}{7}, \quad P(B^c) = \frac{2}{3}$$

- a) [1 punto] ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?
b) [0,75 puntos] Calcule $P(A^c \cap B^c)$.
c) [0,75 puntos] Calcule $P(B/A^c)$.

Resolución

$$P(A) = \frac{2}{7}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{4}{21}.$$

Apartado a)

$$P(A) \times P(B) = \frac{2}{21} \neq \frac{4}{21} = P(A \cap B)$$

✓ No independientes. Como $P(A \cap B) \neq 0$, son compatibles.

Apartado b)

$$✓ \quad P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = \frac{4}{7}.$$

Apartado c)

$$P(B/A^c) = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A^c)} = \frac{1/3 - 4/21}{5/7} = \frac{1}{5}$$

$$✓ \quad P(B/A^c) = \frac{1}{5}.$$

BLOQUE D · Ejercicio 7

Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) [1,5 puntos] Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97 %.

b) [1 punto] Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1 %?

Resolución

$$\hat{p} = \frac{1425}{1500} = 0,95.$$

Apartado a)

Con $z = 2,17$ (97 %):

$$E = 2,17 \sqrt{\frac{0,95 \times 0,05}{1500}} \approx 0,0122$$

✓ IC 97 %: (0,9378, 0,9622).

Apartado b)

$$n \geq \frac{2,17^2 \times 0,95 \times 0,05}{0,01^2} \approx 2236,7$$

✓ $n_{\min} = 2237$.

BLOQUE D · Ejercicio 8

El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) [1 punto] Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8,1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

b) [1 punto] Con un nivel de confianza del 92 %, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

c) [0,5 puntos] Suponiendo $\mu = 7,61$ días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

Resolución**Apartado a)**

Con $z = 2,17$ (97 %):

$$E = 2,17 \times \frac{3}{\sqrt{100}} = 0,651$$

✓ IC 97 %: (7,449, 8,751).

Apartado b)

Con $z = 1,75$ (92 %):

$$n \geq \left(\frac{1,75 \times 3}{1} \right)^2 \approx 27,56$$

✓ $n_{\min} = 28$.

Apartado c)

Con $n = 36$: $\bar{X} \sim N\left(7,61, \frac{3}{\sqrt{36}}\right) = N(7,61, 0,5)$.

$$P(\bar{X} > 8) = P(Z > 0,78) = 1 - 0,7823 = 0,2177$$

✓ $P(\bar{X} > 8) \approx 0,2177$.

⇒ **Error común:** Olvidar dividir σ entre $\sqrt{n}$ al pasar de la variable individual a la media muestral.

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas CCSS · Julio 2022