
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos
Julio 2021 (Extraordinaria) · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D). En cada bloque se elige un único ejercicio entre los dos propuestos (162, 364, 566, 768). Se incluye la resolución de **todos** los ejercicios para cubrir ambas opciones de cada bloque.

BLOQUE A · Ejercicio 1

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$, con a un parámetro real.

- a) Determine para qué valores del parámetro a , la matriz A tiene inversa.
- b) Para $a = 1$, calcule la inversa de A .
- c) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Resolución**Apartado a)**

$$\det(A) = -a - 8 = 0 \Rightarrow a = -8$$

✓ A tiene inversa para todo $a \neq -8$.

Apartado b)

$$\checkmark \quad A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apartado c)

$$A \cdot X = B^t \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B^t$$

$$\checkmark \quad X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

BLOQUE A · Ejercicio 2

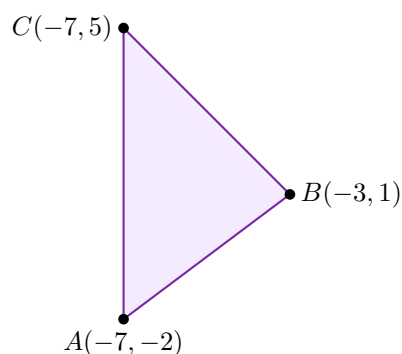
Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \leq -19 \quad 3x - 4y \leq -13 \quad x \geq -7 \quad -x - y \geq 2$$

a) Represente la región factible definida por las inecuaciones y determine sus vértices.

b) ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanza el mínimo y el máximo de la función $G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?

c) Responda de forma razonada si la función $G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

Resolución**Apartado a)**

✓ **Vértices:** $A(-7, -2)$, $B(-3, 1)$, $C(-7, 5)$.

Apartado b)

$$G(A) = -3,6 \quad G(B) = 3,1 \quad G(C) = 13,9$$

✓ **Máximo en $C(-7, 5)$, vale 13,9. Mínimo en $A(-7, -2)$, vale -3,6.**

Apartado c)

Como $\frac{47}{3} \approx 15,67 > 13,9$ (el máximo absoluto en la región):

✓ No, G no puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$, ya que supera el máximo de la región factible.

⇒ **Error común:** Comprobar el valor pedido contra el máximo sin antes haber calculado correctamente dicho máximo en todos los vértices.

BLOQUE B · Ejercicio 3

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & x < 0 \\ x^2 - 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.
- b) Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo.
- c) Calcule $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

Resolución**Apartado a)**

$$f(0) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2^1 = 2 \neq 0.$$

✓ f no es continua en $x = 0$ (y por tanto tampoco derivable ahí). Continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Apartado b)

$f'(x) = 2^{x+1} \ln 2 > 0$ (siempre positiva para $x < 0$). $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (para $x > 0$).

✓ **Creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(0, 1)$. Mínimo en $(1, -1)$.**

Apartado c)

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 2^{x+1} dx + \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \frac{3}{2 \ln 2} - \frac{4}{3}$$

✓ $\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{3}{2 \ln 2} - \frac{4}{3} \approx 0,83.$

⇒ **Error común:** Olvidar trocear la integral en los dos tramos donde f tiene expresiones distintas.

BLOQUE B · Ejercicio 4

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t - 0,3 & 0,2 \leq t \leq 1,8 \\ 0,1t - 0,12 & 1,8 < t \leq 5 \\ -0,5t^2 + 8,3t - 28,62 & 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.

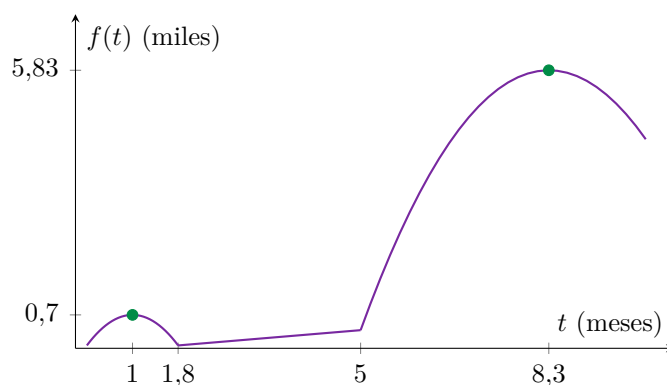
a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es su número?

Resolución**Apartado a)**

En $t = 1,8$: continua, pero $f'(1,8^-) = -1,6 \neq 0,1 = f'(1,8^+) \rightarrow$ **no derivable**. En $t = 5$: continua, pero $f'(5^-) = 0,1 \neq 3,3 = f'(5^+) \rightarrow$ **no derivable**.

✓ **Continua en todo el dominio; derivable en $(0,2, 1,8) \cup (1,8, 5) \cup (5, 10)$.**

Apartado b)

Puntos críticos en $t = 1$ y $t = 8,3$: máximos relativos en $(1, 0,7)$ y $(8,3, 5,825)$.

✓ **Máximo absoluto en $t = 8,3$ meses, con 5825 personas diagnosticadas.**

BLOQUE C · Ejercicio 5

En una población, se sabe que el 15 % de las personas padece una determinada enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos, mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4 % de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

- a) Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.
- b) Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.
- c) Calcule la probabilidad de que, saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

Resolución

$$P(\text{enfermo}) = 0,15, P(+/\text{enfermo}) = 0,92, P(+/\text{sano}) = 0,04.$$

Apartado a)

$$P(+) = 0,15(0,92) + 0,85(0,04) = 0,172$$

$$P(\text{enfermo}/+) = \frac{0,138}{0,172} \approx 0,8023$$

$$\checkmark P(\text{enfermo}/+) \approx 0,8023.$$

Apartado b)

$$P(\text{enfermo} \cap -) = 0,15 \times 0,08 = 0,012$$

$$\checkmark P(\text{enfermo} \cap -) = 0,012.$$

Apartado c)

$$P(\text{enfermo}/-) = \frac{0,012}{0,012 + 0,85 \times 0,96} = \frac{0,012}{0,828} \approx 0,0145$$

$$\checkmark P(\text{enfermo}/-) \approx 0,0145.$$

BLOQUE C · Ejercicio 6

En una comunidad de vecinos, el 90 % de sus miembros tiene vehículo propio, el 40 % hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público. Se elige al azar un miembro de esa comunidad.

- a) Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.
- b) Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.
- c) Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

Resolución

$$P(\text{veh}) = 0,90, P(\text{transp}) = 0,40, P(\text{ninguno}) = 0,03.$$

Apartado a)

$$\checkmark \quad P(\text{veh} \cup \text{transp}) = 1 - 0,03 = 0,97.$$

Apartado b)

$$P(\text{veh} \cap \text{transp}) = 0,9 + 0,4 - 0,97 = 0,33$$

$$P(\text{transp} \cap \text{no veh}) = 0,4 - 0,33 = 0,07$$

$$\checkmark \quad P(\text{transp} \cap \text{no veh}) = 0,07.$$

Apartado c)

$$P(\text{transp}/\text{no veh}) = \frac{0,07}{1 - 0,9} = 0,7$$

$$\checkmark \quad P(\text{transp}/\text{no veh}) = 0,7.$$

BLOQUE D · Ejercicio 7

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

a) Calcule un intervalo de confianza al 99,5 %, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

b) Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, con un error inferior al 5 %.

Resolución

$$\hat{p} = \frac{115}{250} = 0,46.$$

Apartado a)

Con $z = 2,81$ (99,5 %):

$$E = 2,81 \sqrt{\frac{0,46 \times 0,54}{250}} \approx 0,0885$$

✓ IC 99,5 %: (0,3715, 0,5485).

Apartado b)

$$n \geq \frac{2,81^2 \times 0,46 \times 0,54}{0,05^2} \approx 784,6$$

✓ $n_{\min} = 785$.

BLOQUE D · Ejercicio 8

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

a) ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria X ?

b) Para estimar la media poblacional de la variable X , se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados: 11,8; 10; 9,8; 12; 9,7; 10,8; 9,6; 11,3; 10,4; 12,2; 9,1; 10,5

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

c) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1,2.

Resolución**Apartado a)**

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155$$

✓ $\sigma_{\bar{x}} \approx 1,155$.

Apartado b)

Media muestral: $\bar{x} = 10,6$. Con $z = 2,17$ (97 %):

$$E = 2,17 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 2,506$$

✓ IC 97 %: (8,094, 13,106).

Apartado c)

$$n \geq \left(\frac{2,17 \times 4}{1,2} \right)^2 \approx 52,3$$

✓ $n_{\min} = 53$.