
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2021 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno. Se resuelven **4 ejercicios en total**, independientemente del bloque. Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

BLOQUE A · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b .

Resolución

Hallamos la asíntota oblicua $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 2}{x(x - 1)} = a$$

Como la pendiente es 2: $a = 2$.

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + bx + 2 - 2x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b + 2)x + 2}{x - 1} = b + 2$$

La asíntota es $y = 2x + (b + 2)$. Imponemos que pasa por $(1, 1)$:

$$1 = 2(1) + (b + 2) \Rightarrow 1 = b + 4 \Rightarrow b = -3$$

$$\checkmark \quad a = 2 \quad \text{y} \quad b = -3$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Calcular m dividiendo solo los coeficientes principales sin hacer el límite correctamente. Hay que tener en cuenta que el denominador es de grado 1, por lo que m es el coeficiente principal de $ax^2 + bx + 2$ dividido entre el de $x - 1$.

BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Considera la función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x - 6)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{36(\sin(x) - ax)}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula a . (1,5 puntos)

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$. (1 punto)

Resolución**Apartado a)**

Para continuidad en $x = 0$: $f(0) = (0 - 6)e^0 = -6$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\sin(x) - ax)}{x^3} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\cos(x) - a)}{3x^2} = \frac{36(1 - a)}{0}$$

Para que el límite sea finito: $1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$.

Con $a = 1$, nueva indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital de nuevo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(-\sin(x))}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-36\sin(x)}{6x} = -6$$

Como $f(0) = -6$ y el límite lateral derecho vale -6 : función continua ✓

✓ $a = 1$

Apartado b)

En $x = -1$ (tramo $x \leq 0$): $f(-1) = (3(-1) - 6)e^{-1} = -\frac{9}{e}$

$$f'(x) = 3e^x + (3x - 6)e^x = e^x(3x - 3) \Rightarrow f'(-1) = e^{-1}(3(-1) - 3) = -\frac{6}{e}$$

Recta tangente por $\left(-1, -\frac{9}{e}\right)$ con pendiente $-\frac{6}{e}$:

$$y + \frac{9}{e} = -\frac{6}{e}(x + 1) \Rightarrow y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}$$

✓ **Recta tangente:** $y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar aplicar la regla del producto al derivar $(3x - 6)e^x$. Recuerda: $(uv)' = u'v + uv'$, con $u = 3x - 6$ y $v = e^x$.

BLOQUE A · Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . (1 punto)

b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. (1,5 puntos)

Resolución**Apartado a)**

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3 - x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 3$$

Intervalo	$4x^2$	$3 - x$	$f'(x)$	f
$(-\infty, 0)$	+	+	+	Creciente ↗
$(0, 3)$	+	+	+	Creciente ↗
$(3, +\infty)$	+	-	-	Decreciente ↘

En $x = 0$: f' no cambia de signo $\Rightarrow$ **punto de inflexión** (no extremo).

En $x = 3$: f' cambia de + a - $\Rightarrow$ **máximo relativo**, $f(3) = 108 - 81 = 27$.

✓ f crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$. Máximo relativo en $x = 3$, $f(3) = 27$.

Apartado b)

Cortes con el eje OX : $4x^3 - x^4 = 0 \Rightarrow x^3(4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 4$.

En $[0, 4]$: $f(x) = x^3(4 - x) \geq 0$ ✓

$$\text{Área} = \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = 256 - \frac{1024}{5} = \frac{1280 - 1024}{5} = \frac{256}{5}$$

✓ Área = $\frac{256}{5}$ unidades cuadradas.

$\Rightarrow$ **Error común:** En $x = 0$ hay un punto de inflexión, no un extremo. f' no cambia de signo en $x = 0$ porque $4x^2 \geq 0$ siempre. Confundirlo con un mínimo llevaría a calcular mal los intervalos de crecimiento.

BLOQUE A · Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Considera la función $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt.$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

Calculamos $F(1)$:

$$F(1) = \int_0^1 (2t + \sqrt{t}) dt = \left[t^2 + \frac{2t^{3/2}}{3} \right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Calculamos $F'(1)$ por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$F'(x) = 2x + \sqrt{x} \Rightarrow F'(1) = 2 + 1 = 3$$

Ecuación de la recta tangente por $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ con pendiente 3:

$$y - \frac{5}{3} = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - \frac{4}{3}$$

✓ **Recta tangente:** $y = 3x - \frac{4}{3}$

⇒ **Error común:** Calcular $F'(x)$ integrando de nuevo en lugar de aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo, que dice directamente que si $F(x) = \int_0^x g(t) dt$, entonces $F'(x) = g(x)$.

BLOQUE B · Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m . **(1,5 puntos)**

b) Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

Resolución**Apartado a)**

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{vmatrix} = m(0-6m)-2(0-2)+(-1)(15m+4) = -6m^2+4-15m-4 = -3m(2m+5)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m = 0 \quad \text{o} \quad m = -\frac{5}{2}$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2}$: $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{SCD}$.

Si $m = 0$: Estudiamos la matriz ampliada por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3 \Rightarrow \text{SCI}$.

Si $m = -\frac{5}{2}$: Estudiamos la matriz ampliada por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -2 \end{array} \right)$$

La fila 2 es $(0 \ 0 \ 0 \mid 2) \Rightarrow$ ecuación $0 = 2$, contradicción.

$\text{rg}(A) = 2, \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{SI}$.

Valor de m	Tipo de sistema
$m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2}$	SCD
$m = 0$	SCI
$m = -\frac{5}{2}$	SI

Apartado b)

Para $m = 0$ (SCI). De la matriz escalonada del apartado anterior:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{2}{5} \\ -4y + 2z = -2 \Rightarrow z = 2y - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{2}{5} ; y = \lambda ; z = 2\lambda - 1$$

Como $x = \frac{2}{5}$ es fijo en **todas** las soluciones, **no existe ninguna solución con $x = 0$** .

✓ **Solución general:** $x = \frac{2}{5}$, $y = \lambda$, $z = 2\lambda - 1$. **No existe solución con $x = 0$.**

⇒ **Error común:** Anular el determinante no distingue entre SCI y SI. Siempre hay que estudiar los rangos de A y A^* para cada valor crítico mediante eliminación gaussiana.

BLOQUE B · Ejercicio 6 (2,5 puntos)

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Para fabricar cada botella se necesitan 50 g, para cada garrafa 100 g y 1 kg para cada bidón. Se debe producir el doble de botellas que de garrafas. En total se producen 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Resolución

Llamamos b =botellas, g =garrafas, d =bidones. Planteamos el sistema (todo en gramos):

$$\left. \begin{array}{l} 50b + 100g + 1000d = 10000 \\ b = 2g \\ b + g + d = 52 \end{array} \right\}$$

Sustituimos $b = 2g$ en las otras dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 100g + 100g + 1000d = 10000 \Rightarrow g + 5d = 50 \\ 2g + g + d = 52 \Rightarrow 3g + d = 52 \end{array} \right\}$$

De la primera: $g = 50 - 5d$. Sustituimos en la segunda:

$$3(50 - 5d) + d = 52 \Rightarrow 150 - 15d + d = 52 \Rightarrow -14d = -98 \Rightarrow d = 7$$

$$g = 50 - 35 = 15 \quad b = 2 \cdot 15 = 30$$

$$\text{Verificación: } 50(30) + 100(15) + 1000(7) = 10000 \quad \checkmark \quad 30 + 15 + 7 = 52 \quad \checkmark$$

✓ **Botellas: 30, Garrafas: 15, Bidones: 7.**

⇒ **Error común:** No convertir todas las unidades al mismo sistema. El polietileno total son 10 kg = 10.000 g, y hay que expresar todos los consumos en gramos antes de plantear el sistema.

BLOQUE B · Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$

- a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$.
(1,5 puntos)
- b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$.
(1 punto)

Resolución**Apartado a)**

s tiene vector director $\vec{v}_s = (-2, 1, 2)$. El plano perpendicular a s tiene $\vec{v}_s$ como normal:

$$-2(x - 1) + 1(y - 0) + 2(z + 5) = 0 \Rightarrow -2x + 2 + y + 2z + 10 = 0$$

✓ **Plano:** $-2x + y + 2z + 12 = 0$

Apartado b)

Vector director de r :

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-6 - 2)\vec{i} - (4 + 3)\vec{j} + (4 - 9)\vec{k} = (-8, -7, -5)$$

Normal al plano: $\vec{n} = (-2, 1, 2)$. El seno del ángulo entre la recta y el plano:

$$\text{sen } \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_r| |\vec{n}|} = \frac{|(-8)(-2) + (-7)(1) + (-5)(2)|}{\sqrt{64 + 49 + 25} \cdot \sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|16 - 7 - 10|}{\sqrt{138} \cdot 3} = \frac{1}{3\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{138}}{414}$$

✓ $\text{sen } \alpha = \frac{1}{3\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{138}}{414}$

⇒ **Error común:** Confundir la fórmula del ángulo entre recta y plano con la del ángulo entre dos planos. Para recta-plano se usa el **seno**; para plano-plano se usa el coseno del ángulo entre sus normales.

BLOQUE B · Ejercicio 8 (2,5 puntos)

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s , que pasa por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(a, 1, 0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Resolución

Vector director de s : $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (a-1, 1, -2)$

Parametrizamos las dos rectas con parámetros distintos:

$$r : (x, y, z) = (-3 + 2t, -4 + 2t, 3 + 3t) \quad s : (x, y, z) = (1 + (a-1)\lambda, \lambda, 2 - 2\lambda)$$

Igualemos componente y : $-4 + 2t = \lambda \Rightarrow \lambda = 2t - 4$

Igualemos componente z :

$$3 + 3t = 2 - 2\lambda = 2 - 2(2t - 4) = 10 - 4t \Rightarrow 7t = 7 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \lambda = -2$$

Igualemos componente x :

$$-3 + 2(1) = 1 + (a-1)(-2) \Rightarrow -1 = 3 - 2a \Rightarrow a = 2$$

Punto de corte con $t = 1$: $(-1, -2, 6)$

Verificación en s con $\lambda = -2$: $x = 1 + (2-1)(-2) = -1$ ✓; $y = -2$ ✓; $z = 2 - 2(-2) = 6$

✓

✓ $a = 2$. **Punto de corte:** $(-1, -2, 6)$.

⇒ **Error común:** Parametrizar las dos rectas con el mismo parámetro. Hay que usar parámetros distintos (t y λ) para cada recta, ya que los valores del parámetro en el punto de corte son en general diferentes.

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas II · Junio 2021