
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Julio 2023 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno. Se resuelven **4 ejercicios en total**, independientemente del bloque. Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

BLOQUE A · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Sea la función $f : [-2, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

a) [2 puntos] Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [0,5 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$.

Resolución**Apartado a)**

Zona $[-2, 0]$: $f(x) = 5x + 1$ es lineal creciente, sin extremos relativos en el interior.

Zona $(0, 2\pi]$:

$$f'(x) = e^x \cos(x) + e^x(-\sin(x)) = e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

Como $e^x > 0$ siempre, igualamos $\cos(x) - \sin(x) = 0 \Rightarrow \tan(x) = 1$:

$$x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = \frac{5\pi}{4} \quad \text{en } (0, 2\pi]$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

Intervalo	$\cos x - \sin x$	$f'(x)$	f
$(0, \frac{\pi}{4})$	+	+	Creciente ↗
$(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$	-	-	Decreciente ↘
$(\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$	+	+	Creciente ↗

Extremos relativos:

$$x = \frac{\pi}{4} : \text{máximo relativo, } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4}$$

$$x = \frac{5\pi}{4} : \text{mínimo relativo, } f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{5\pi/4} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4}$$

Extremos absolutos — comparamos todos los valores candidatos:

$$f(-2) = 5(-2) + 1 = -9$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} \approx 1,55$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4} \approx -35,88$$

$$f(2\pi) = e^{2\pi} \approx 535$$

✓ **Máximo absoluto:** $f(2\pi) = e^{2\pi}$ en $x = 2\pi$.

Mínimo absoluto: $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}$ en $x = \frac{5\pi}{4}$.

Apartado b)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = e^{\pi/2}(0 - 1) = -e^{\pi/2}$$

✓ **Recta tangente:** $y = -e^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$

⇒ **Error común:** Olvidar evaluar f en los extremos del dominio al buscar extremos absolutos. En funciones definidas en intervalos cerrados, los extremos absolutos pueden estar en los extremos del dominio.

BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(\ln x)^2$.

a) [1,25 puntos] Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1,25 puntos] Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Resolución**Apartado a)**

$$f'(x) = (\ln x)^2 + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = (\ln x)^2 + 2 \ln x = \ln x(\ln x + 2)$$

$$\text{Igualamos } f'(x) = 0: \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{o} \quad \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$$

Intervalo	$\ln x$	$\ln x + 2$	$f'(x)$	f
$(0, e^{-2})$	−	−	+	Creciente ↗
$(e^{-2}, 1)$	−	+	−	Decreciente ↘
$(1, +\infty)$	+	+	+	Creciente ↗

$$x = e^{-2} : \text{máximo relativo, } f(e^{-2}) = e^{-2}(-2)^2 = \frac{4}{e^2}$$

$$x = 1 : \text{mínimo relativo, } f(1) = 1 \cdot 0 = 0$$

✓ **Máximo relativo:** $f(e^{-2}) = \frac{4}{e^2}$ en $x = e^{-2}$. **Mínimo relativo:** $f(1) = 0$ en $x = 1$.

Apartado b)

Estudiamos el comportamiento en los extremos del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$$

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$ y $f(1) = 0$, el mínimo relativo en $x = 1$ es también **mínimo absoluto**. No existe máximo absoluto.

✓ **Mínimo absoluto:** $f(1) = 0$ en $x = 1$. **No existe máximo absoluto.**

⇒ **Error común:** Al derivar $f(x) = x(\ln x)^2$, olvidar aplicar la regla del producto correctamente. Recuerda: $(uv)' = u'v + uv'$.

BLOQUE A · Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx + 2 = 0$.

Resolución

Observamos que $\frac{d}{dx} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right] = \frac{\ln x}{x}$, luego:

$$\int_a^1 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_a^1 = \frac{(\ln 1)^2}{2} - \frac{(\ln a)^2}{2} = -\frac{(\ln a)^2}{2}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$-\frac{(\ln a)^2}{2} + 2 = 0 \Rightarrow (\ln a)^2 = 4 \Rightarrow \ln a = \pm 2$$

$$\ln a = 2 \Rightarrow a = e^2 > 1 \quad (\text{no válido})$$

$$\ln a = -2 \Rightarrow a = e^{-2} \quad \text{y } 0 < e^{-2} < 1 \quad \checkmark$$

$$\checkmark \quad a = e^{-2}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Intentar calcular la integral de $\frac{\ln x}{x}$ por partes. Es más directo reconocer que es de la forma $\int f'(x)f(x) dx = \frac{[f(x)]^2}{2} + C$ con $f(x) = \ln x$.

BLOQUE A · Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Considera las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \frac{4}{x^2}$.

a) [1,25 puntos] Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) [1,25 puntos] Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g .

Resolución**Apartado a)**

$$5 - x^2 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^2(5 - x^2) = 4 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\text{Sea } u = x^2: (u - 1)(u - 4) = 0 \Rightarrow u = 1 \text{ o } u = 4$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad ; \quad x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

✓ **Puntos de corte:** $(-2, 1)$, $(-1, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$.

Apartado b)

Los recintos acotados están en $[-2, -1]$ y $[1, 2]$, donde $f > g$. Por simetría:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \int_1^2 \left[(5 - x^2) - \frac{4}{x^2} \right] dx = 2 \int_1^2 (5 - x^2 - 4x^{-2}) dx \\ &= 2 \left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x} \right]_1^2 = 2 \left[\left(10 - \frac{8}{3} + 2 \right) - \left(5 - \frac{1}{3} + 4 \right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{28}{3} - \frac{26}{3} \right] = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

✓ **Área total** = $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

⇒ **Error común:** Intentar integrar entre $x = -2$ y $x = 2$ directamente. La función $g(x) = \frac{4}{x^2}$ no está definida en $x = 0$, por lo que el recinto acotado se forma en $[-2, -1]$ y $[1, 2]$ por separado.

BLOQUE B · Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) [1 punto] Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.

b) [1,5 puntos] Halla x , distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$.

Resolución**Apartado a)**

Calculamos la matriz $A - mI$:

$$A - mI = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|A - mI| = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = 3$$

✓ $A - mI$ no tiene inversa para $m = 0$ y $m = 3$.

Apartado b)

Calculamos la matriz $B = \frac{1}{x}(A - I)$:

$$B = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos su inversa por adjuntos:

$$B^{-1} = \frac{(B^{adj})^t}{|B|} \quad \text{con} \quad |B| = \frac{2}{x^3}$$

$$(B^{adj})^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{x^3}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

Como $A - xI$ debe ser la inversa de B , igualamos $A - xI = B^{-1}$:

$$A - xI = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

Iguando elementos fuera de la diagonal: $1 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2$

Verificamos con la diagonal: $1 - x = -\frac{x}{2} \Rightarrow 1 - 2 = -1 = -\frac{2}{2} = -1 \checkmark$

✓ $x = 2$

⇒ **Error común:** No escribir explícitamente la matriz $B = \frac{1}{x}(A - I)$ antes de calcular su inversa. Es fundamental factorizar correctamente para aplicar la fórmula de la inversa por adjuntos.

BLOQUE B · Ejercicio 6 (2,5 puntos)

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 € sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 € menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente. Los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6 %, el 12 % y el 30 %, respectivamente. El importe total incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 €. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada bebida.

Resolución

Llamamos r , c , v a los importes sin impuestos de refrescos, cerveza y vino. Planteamos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} r + c + v = 500 \\ r + c - v = 60 \\ 1,06r + 1,12c + 1,30v = 592,4 \end{array} \right\}$$

Sumando las dos primeras: $2(r + c) = 560 \Rightarrow r + c = 280$ y $v = 220$

Sustituimos en la tercera: $1,06r + 1,12c + 1,30 \cdot 220 = 592,4$

$$1,06r + 1,12c = 306,4$$

Con $r + c = 280 \Rightarrow r = 280 - c$:

$$1,06(280 - c) + 1,12c = 306,4 \Rightarrow 296,8 + 0,06c = 306,4 \Rightarrow c = 160 \Rightarrow r = 120$$

Importes **con impuestos**:

Refrescos: $1,06 \cdot 120 = 127,2$ € Cerveza: $1,12 \cdot 160 = 179,2$ € Vino: $1,30 \cdot 220 = 286$ €

Verificación: $127,2 + 179,2 + 286 = 592,4$ ✓

✓ **Refrescos: 127,2 € Cerveza: 179,2 € Vino: 286 €**

⇒ **Error común:** Confundir el importe sin impuestos con el importe con impuestos. La pregunta pide el importe **incluyendo impuestos**, por lo que hay que multiplicar cada precio base por $(1 + \text{tipo})$.

BLOQUE B · Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

a) [1,5 puntos] Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.

b) [1 punto] Halla el ángulo que forman π_1 y π_2 .

Resolución**Apartado a)**

Vector director de $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 2)$$

Un punto de r con $z = 0$: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 1$ Punto $Q = (1, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{QP} = (1, 5, -2)$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$\overrightarrow{QP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (10 + 2)\vec{i} - (2 - 2)\vec{j} + (1 + 5)\vec{k} = (12, 0, 6)$$

$$d = \frac{\sqrt{144 + 0 + 36}}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{6}} = \sqrt{30}$$

✓ Distancia = $\sqrt{30}$ unidades.

Apartado b)

$\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{n}_2 = (1, 1, 0)$:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|1 - 1 + 0|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

✓ Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

$\Rightarrow$ **Error común:** En el apartado a), intentar parametrizar la recta y hallar el pie de la perpendicular en lugar de usar directamente la fórmula $d = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$.

BLOQUE B · Ejercicio 8 (2,5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0, 2, -2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 3, 2)$ con los planos cartesianos.

Resolución

Ecuación del plano por A , B , C :

$$\vec{AB} = (3, 0, 3) \quad ; \quad \vec{AC} = (2, 1, 4)$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-3, -6, 3) \sim (1, 2, -1)$$

Ecuación del plano por $A(0, 2, -2)$:

$$1(x - 0) + 2(y - 2) - 1(z + 2) = 0 \Rightarrow x + 2y - z - 6 = 0$$

Cortes con los ejes cartesianos:

$$\text{Eje } X \ (y = 0, z = 0) : \ x = 6 \Rightarrow P_x = (6, 0, 0)$$

$$\text{Eje } Y \ (x = 0, z = 0) : \ 2y = 6 \Rightarrow P_y = (0, 3, 0)$$

$$\text{Eje } Z \ (x = 0, y = 0) : \ -z = 6 \Rightarrow P_z = (0, 0, -6)$$

Volumen del tetraedro con vértices $O(0, 0, 0)$, P_x , P_y , P_z :

$$V = \frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{OP_x}, \overrightarrow{OP_y}, \overrightarrow{OP_z}) \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |6 \cdot 3 \cdot (-6)| = \frac{108}{6} = 18$$

✓ Volumen = 18 unidades cúbicas.

⇒ **Error común:** Olvidar que el volumen del tetraedro formado por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ con los planos coordenados es $V = \frac{1}{6}|abc|$. Hay que llevar el plano a esa forma primero, o calcular directamente el determinante.