
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Julio 2021 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno. Se resuelven **4 ejercicios en total**, independientemente del bloque. Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

BLOQUE A · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos(x)) + b \operatorname{sen}(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = 7.$$

Resolución

Evalúamos en $x = 0$: obtenemos $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{sen}(x) + b \cos(x) - 2e^x}{2x} = \frac{0 + b - 2}{0} = \frac{b - 2}{0}$$

Para que el límite sea finito: $b - 2 = 0 \Rightarrow \mathbf{b = 2}$.

Con $b = 2$, nueva indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital de nuevo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos(x) - 2 \operatorname{sen}(x) - 2e^x}{2} = \frac{a - 0 - 2}{2} = \frac{a - 2}{2} = 7 \Rightarrow a - 2 = 14 \Rightarrow a = 16$$

✓ $a = 16$ y $b = 2$

$\Rightarrow$ **Error común:** No reconocer que la condición $b = 2$ surge de la primera aplicación de L'Hôpital. La primera derivada del numerador en $x = 0$ debe valer 0 para que el límite sea finito.

BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $(1, 2)$ un punto crítico.

Resolución

Condición 1 — El punto $(1, 2)$ pertenece a la gráfica: $f(1) = 2$:

$$\frac{b}{1+a} = 2 \Rightarrow b = 2(1+a)$$

Condición 2 — Es punto crítico: $f'(1) = 0$. Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2bx(1+ax^4) - bx^2 \cdot 4ax^3}{(1+ax^4)^2} = \frac{2bx(1-ax^4)}{(1+ax^4)^2}$$

$$f'(1) = \frac{2b(1-a)}{(1+a)^2} = 0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=1$$

De la condición 1: $b = 2(1+1) = 4$.

$$\checkmark \quad a = 1 \quad \text{y} \quad b = 4$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar que un punto crítico requiere tanto que el punto pertenezca a la gráfica ($f(1) = 2$) como que $f'(1) = 0$. Son dos condiciones independientes que dan lugar a un sistema de dos ecuaciones.

BLOQUE A · Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t dt.$$

Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Resolución

Por el Teorema Fundamental del Cálculo: $f'(x) = xe^x$

$$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

Como $e^x > 0$ siempre, el signo depende de $(1+x)$:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

Intervalo	$1+x$	$f''(x)$	f
$(-\infty, -1)$	$-$	$-$	Cóncava $\cap$
$(-1, +\infty)$	$+$	$+$	Convexa $\cup$

Punto de inflexión en $x = -1$:

$$f(-1) = 1 + \int_0^{-1} te^t dt = 1 + [e^t(t-1)]_0^{-1} = 1 + (e^{-1}(-2) - e^0(-1)) = 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}$$

✓ **Cóncava en $(-\infty, -1)$, convexa en $(-1, +\infty)$. Punto de inflexión en $x = -1$, $f(-1) = 2 - \frac{2}{e}$.**

⇒ **Error común:** Confundir concavidad con crecimiento. La concavidad la determina f'' , no f' . También es frecuente olvidar integrar por partes para calcular $f(-1)$.

BLOQUE A · Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ (para $x \neq -1$, $x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(2, 4)$.

Resolución

Dividimos (mismo grado en numerador y denominador):

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{(x - 1)(x + 1)}$$

Descomponemos $\frac{2}{(x - 1)(x + 1)}$ en fracciones parciales:

$$\frac{2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Rightarrow 2 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

$$x = 1 : 2 = 2A \Rightarrow A = 1 \quad x = -1 : 2 = -2B \Rightarrow B = -1$$

Integramos:

$$F(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) dx = x + \ln |x - 1| - \ln |x + 1| + C$$

Aplicamos $F(2) = 4$:

$$2 + \ln 1 - \ln 3 + C = 4 \Rightarrow C = 2 + \ln 3$$

$$\checkmark \quad F(x) = x + \ln |x - 1| - \ln |x + 1| + 2 + \ln 3$$

$\Rightarrow$ **Error común:** No hacer la división previa cuando numerador y denominador tienen el mismo grado. Hay que dividir antes de descomponer en fracciones parciales.

BLOQUE B · Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$. **(1,25 puntos)**

b) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $A^4X + B = AC$. **(1,25 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, se cumple que $A^2 = -A^{-1}$ ✓

Apartado b)

Despejamos la matriz X :

$$A^4X + B = AC \Rightarrow A^2 \cdot A^2 \cdot X = AC - B \Rightarrow (-A^{-1})(-A^{-1}) \cdot X = AC - B$$

$$\Rightarrow A^{-1}A^{-1} \cdot X = AC - B \Rightarrow A \cdot A \cdot A^{-1}A^{-1} \cdot X = A^2AC - A^2B \Rightarrow X = -C + A^{-1}B$$

$$X = -C + A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -19 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

⇒ **Error común:** No aprovechar la relación $A^2 = -A^{-1}$ para simplificar $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-A^{-1})(-A^{-1}) = A^{-2}$. Usarla es la clave para despejar X sin calcular A^4 directamente.

BLOQUE B · Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. **(1,25 puntos)**

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta? **(1,25 puntos)**

Resolución

Llamamos A , B , C al número de viajes por cada ruta. Las condiciones comunes son:

$$\left. \begin{array}{l} A + B + C = 70 \\ B = A + C \end{array} \right\} \Rightarrow B = 35$$

Apartado a)

La nueva condición $2(A + C) = 70 \Rightarrow A + C = 35$, que ya sabíamos de $B = 35$. Es **redundante** con las anteriores: tenemos 2 ecuaciones independientes y 3 incógnitas.

✓ **No podemos deducirlo: el sistema es SCI con infinitas soluciones.**

Apartado b)

Añadimos $2C = B - 5$, es decir $B - 2C = 5$. Con $B = 35$:

$$35 - 2C = 5 \Rightarrow C = 15 \quad A = B - C = 35 - 15 = 20$$

Verificación: $20 + 35 + 15 = 70$ ✓

✓ **Ruta A: 20 viajes, Ruta B: 35 viajes, Ruta C: 15 viajes.**

⇒ **Error común:** En el apartado a), no analizar si la nueva condición es linealmente independiente de las anteriores. La clave es comprobar si añade información nueva al sistema o es redundante.

BLOQUE B · Ejercicio 7 (2,5 puntos)

La recta perpendicular desde el punto $A(1, 1, 0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto $B\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

a) Calcula la ecuación del plano π . **(1,5 puntos)**

b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π . **(1 punto)**

Resolución**Apartado a)**

El vector normal al plano es $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim (0, -1, 1)$$

El plano pasa por $B\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$0(x - 1) - 1\left(y - \frac{1}{2}\right) + 1\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow -y + z = 0$$

✓ **Plano:** $-y + z = 0$ (equivalentemente $y = z$).

Apartado b)

B es el pie de la perpendicular, es decir el punto medio entre A y su simétrico A' . La distancia de A a A' es el doble de $|AB|$:

$$|AB| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d(A, A') = 2 \cdot |AB| = \sqrt{2}$$

✓ **Distancia de A a su simétrico** = $\sqrt{2}$ unidades.

⇒ **Error común:** Calcular la distancia de A al plano en lugar de la distancia de A a su simétrico, que es el **doble** de la distancia al plano.

BLOQUE B · Ejercicio 8 (2,5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s . **(1,25 puntos)**

b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s . **(1,25 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

Vector director de r : $\vec{v}_r = (1, 0, -1)$. Punto de r : $R(3, 1, -3)$.

Vector director de s : $\vec{v}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0)$. Punto de s : $S(0, 1, 0)$.

No son proporcionales ($\vec{v}_r \not\sim \vec{v}_s$), luego no son paralelas. $\overrightarrow{RS} = (-3, 0, 3)$.

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3(0 - 1) - 0 + 3(-1 - 0) = 3 - 3 = 0$$

Determinante = 0 $\Rightarrow$ las rectas **se cortan**.

Punto de corte: de $z = 0$: $-3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3$. Punto: $(0, 1, 0)$ ✓

✓ **Las rectas r y s se cortan en el punto $(0, 1, 0)$.**

Apartado b)

La dirección de la recta buscada es perpendicular a $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$:

$$\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 1)\vec{i} - (0 + 1)\vec{j} + (-1 - 0)\vec{k} = (-1, -1, -1) \sim (1, 1, 1)$$

La recta buscada pasa por el punto de corte $(0, 1, 0)$ con dirección $(1, 1, 1)$:

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{1}$$

✓ **Recta perpendicular:** $x = \frac{y - 1}{1} = z$

$\Rightarrow$ **Error común:** No usar el punto de corte hallado en el apartado a) como punto de la recta buscada. La recta que corta perpendicularmente a ambas pasa precisamente por ese punto.

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas II · Julio 2021