
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Septiembre 2020 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 8 ejercicios sin bloques diferenciados. Se resuelven **4 ejercicios en total**. Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

Resolución

$$f'(x) = e^x(x^2 - 5x + 6) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 3x + 1)$$

$$f''(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 2) = e^x(x - 2)(x + 1)$$

Como $e^x > 0$ siempre, el signo depende de $(x - 2)(x + 1)$:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Intervalo	$(x + 1)$	$(x - 2)$	$f''(x)$	f
$(-\infty, -1)$	−	−	+	Convexa $\smile$
$(-1, 2)$	+	−	−	Cóncava $\frown$
$(2, +\infty)$	+	+	+	Convexa $\smile$

Puntos de inflexión:

$$f(-1) = e^{-1}(1 + 5 + 6) = \frac{12}{e} \quad f(2) = e^2(4 - 10 + 6) = 0$$

✓ **Convexa en** $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. **Cóncava en** $(-1, 2)$. **Puntos de inflexión:** $\left(-1, \frac{12}{e}\right)$ y $(2, 0)$.

⇒ **Error común:** Al calcular f'' , olvidar aplicar la regla del producto dos veces. La clave es que $f'' = (f')'$ y $f' = e^x(x^2 - 3x + 1)$ ya es un producto.

Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Calcula $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^2(x) dx$.

Resolución

Usamos la identidad $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$:

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cos(2x) dx$$

Primera integral:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

Segunda integral $\int_0^{\pi} x \cos(2x) dx$ por partes:

$$u = x ; du = dx \quad dv = \cos(2x) dx ; v = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$$

$$= \left[\frac{x \operatorname{sen}(2x)}{2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} dx = 0 - \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4} [\cos(2x)]_0^{\pi} = \frac{1}{4} (1 - 1) = 0$$

Resultado:

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\checkmark \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Intentar integrar $x \operatorname{sen}^2(x)$ directamente por partes sin usar la identidad trigonométrica. La identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ es imprescindible para simplificar el cálculo.

Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Considera el sistema $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Discute el sistema según los valores de m . **(1,5 puntos)**

b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

Resolución

Apartado a)

$$\det(A) = (-12 + 2m + 4) + 2(-3m) + (m^2 + 2m) = m^2 - 2m - 8 = (m - 4)(m + 2)$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow m = 4 \quad \text{o} \quad m = -2$$

Si $m \neq 4$ y $m \neq -2$: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{SCD}$.

Si $m = 4$: Estudiamos la matriz ampliada por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{rg}(A) = 2, \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{SI}.$$

Si $m = -2$: Estudiamos la matriz ampliada por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3 \Rightarrow \text{SCI}.$$

Valor de m	Tipo de sistema
$m \neq 4$ y $m \neq -2$	SCD
$m = 4$	SI
$m = -2$	SCI

Apartado b)

Para $m = -2$, de la forma escalonada: $-3z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$ y $x = 2y + \frac{7}{3} = 2\lambda + \frac{7}{3}$

$$x = 2\lambda + \frac{7}{3}; \quad y = \lambda; \quad z = -\frac{1}{3}$$

Como $z = -\frac{1}{3}$ es fijo en **todas** las soluciones, **no existe ninguna solución con** $z = 0$.

✓ **Solución general:** $x = 2\lambda + \frac{7}{3}$, $y = \lambda$, $z = -\frac{1}{3}$. **No existe solución con** $z = 0$.

⇒ **Error común:** Confundir los pasos de Gauss al calcular los rangos. Siempre hay que llevar la matriz ampliada a forma escalonada para cada valor crítico por separado.

Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r . **(1,5 puntos)**

b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1 punto)**

Resolución**Apartado a)**

Vector director de r :

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3 + 8)\vec{i} - (4 - 12)\vec{j} + (-8 + 9)\vec{k} = (5, 8, 1)$$

Normal al plano: $\vec{n} = (1, -1, a)$.

Para que $\pi \parallel r$: $\vec{v}_r \perp \vec{n}$:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 5 - 8 + a = 0 \Rightarrow a = 3$$

Verificamos que r no está contenida en π : con $z = 0$ obtenemos el punto $(-2, -3, 0)$.
En π : $-2 - (-3) + 0 = 1 \neq 0$ ✓

✓ $a = 3$

Apartado b)

El plano perpendicular a r tiene a $\vec{v}_r = (5, 8, 1)$ como normal. Por $P(1, 2, 3)$:

$$5(x - 1) + 8(y - 2) + 1(z - 3) = 0 \Rightarrow 5x + 8y + z - 24 = 0$$

✓ **Plano:** $5x + 8y + z - 24 = 0$

⇒ **Error común:** En el apartado a), verificar el paralelismo pero olvidar comprobar que la recta no está contenida en el plano. Si estuviera contenida, la solución no sería válida.

Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Sea la función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{2ax-4b} & \text{si } x < 1 \\ 1 - x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Determina los valores de a y b . **(1,75 puntos)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. **(0,75 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

Para que f sea derivable en $x = 1$, debe ser continua y las derivadas laterales deben coincidir.

Continuidad en $x = 1$: $f(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{2ax-4b} = e^{2a-4b} = 1 \Rightarrow 2a - 4b = 0 \Rightarrow a = 2b$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ae^{2ax-4b} & x < 1 \\ -\ln x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2ae^{2a-4b} = 2a \cdot 1 = 2a \quad ; \quad f'(1) = -\ln 1 - 1 = -1$$

$$2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

$$\checkmark \quad a = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad b = -\frac{1}{4}$$

Apartado b)

En $x = 2$ (tramo $x \geq 1$): $f(2) = 1 - 2 \ln 2$; $f'(2) = -\ln 2 - 1$

$$y - (1 - 2 \ln 2) = (-\ln 2 - 1)(x - 2) \Rightarrow y = -(\ln 2 + 1)x + 3$$

✓ Recta tangente: $y = -(\ln 2 + 1)x + 3$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar que para que f sea derivable en $x = 1$ se necesitan **dos** condiciones: continuidad **y** coincidencia de derivadas laterales. Solo con la continuidad se obtiene una ecuación insuficiente.

Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza el recinto que determinan. **(1 punto)**

b) Determina el área del recinto anterior. **(1,5 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

Zona $x \geq 0$: $x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ✓

Zona $x < 0$: $-x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ ✓

✓ **Puntos de corte:** $(-2, 2)$ y $(2, 2)$.

Apartado b)

En $[-2, 2]$: $f > g$ (comprobación en $x = 1$: $f(1) = 1 > -1 = g(1)$). Por simetría:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= 2 \int_0^2 [x - (x^2 - 2)] dx = 2 \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx = 2 \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 \\ &= 2 \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

✓ **Área** = $\frac{20}{3}$ unidades cuadradas.

⇒ **Error común:** No separar el valor absoluto en dos tramos. En $x < 0$, $|x| = -x$, por lo que la integral en $[-2, 0]$ usa $-x - (x^2 - 2)$, no $x - (x^2 - 2)$. La simetría permite evitar este error calculando el doble de la integral en $[0, 2]$.

Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = 0$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1,25 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna:

$$|A - \lambda I| = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-\lambda(1 - \lambda) - 2) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

$$\checkmark \quad \lambda = 1, \quad \lambda = 2, \quad \lambda = -1.$$

Apartado b)

Con $\lambda = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_1; F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

De F_2 : $z = 0$. De F_1 : $y = 0$. $x = \lambda$ libre.

Como $z = 0$ es fijo, **no existe ninguna solución con $z = 1$.**

$$\checkmark \quad \textbf{Solución: } x = \lambda, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad \textbf{No existe solución con } z = 1.$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Al calcular $|A - \lambda I|$, no aprovechar los ceros de la primera columna para simplificar el desarrollo del determinante de orden 3.

Ejercicio 8 (2,5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

a) Calcula la distancia entre r y π . (1 punto)

b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r . (1,5 puntos)

Resolución**Apartado a)**

$$\vec{v}_r = (2, 1, -1), \vec{n} = (1, -1, 1).$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 2 - 1 - 1 = 0 \quad \checkmark \quad (r \text{ es paralela o está contenida en } \pi).$$

Tomamos el punto $P(0, -1, -2)$ de r ($\lambda = 0$). En π : $0 - (-1) + (-2) = -1 \neq 2 \Rightarrow r$ es **paralela** a π (no contenida).

$$d = \frac{|0 - (-1) + (-2) - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

✓ $d = \sqrt{3}$ unidades.

Apartado b)

El plano buscado contiene a r (dirección $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$) y es perpendicular a π (normal $\vec{n} = (1, -1, 1)$). Su normal es:

$$\vec{m} = \vec{v}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-1)\vec{i} - (2+1)\vec{j} + (-2-1)\vec{k} = (0, -3, -3) \sim (0, 1, 1)$$

El plano pasa por $P(0, -1, -2)$:

$$0(x-0) + 1(y+1) + 1(z+2) = 0 \Rightarrow y + z + 3 = 0$$

✓ Plano: $y + z + 3 = 0$

$\Rightarrow$ Error común: En el apartado a), no verificar si la recta está contenida en el plano antes de calcular la distancia. Si estuviera contenida, la distancia sería 0 y el método no sería válido.