
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2025 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 1 ejercicio obligatorio (Ej. 1) + 1 ejercicio de cada bloque optativo (Bloque 1: Ej. 2 ó 3 · Bloque 2: Ej. 4 ó 5 · Bloque 3: Ej. 6 ó 7). Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

BLOQUE OBLIGATORIO · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Juan ha gastado 80 € por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

a) [1,25 puntos] ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.

b) [1,25 puntos] Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57 €, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30 %, del 40 % y del 20 %, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

Resolución**Apartado a)**

Llamamos x = precio del jersey, y = precio de la camisa, z = precio del pantalón. Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 80 \\ x = \frac{y + z}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 80 \\ 3x - y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Sumamos las dos ecuaciones: $4x = 80 \Rightarrow x = 20$

Luego, **el precio del jersey es 20 €**. Vamos a ver si podemos calcular el precio de la camisa:

$$\left. \begin{array}{l} 20 + y + z = 80 \\ 60 - y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 60 \\ -y - z = -60 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 60 - \lambda ; z = \lambda$$

No podemos calcular el precio de la camisa, ya que es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones.

✓ **El precio del jersey SÍ se puede determinar: $x = 20$ €.** **El precio de la camisa NO: el sistema tiene infinitas soluciones.**

⇒ **Error común:** Muchos estudiantes concluyen que tampoco se puede hallar el jersey. La clave está en sumar las dos ecuaciones del sistema inicial, lo que elimina y y z a la vez y despeja directamente x .

Apartado b)

Planteamos el sistema con la nueva ecuación de rebajas (descuentos del 30 %, 40 % y 20 %):

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 80 \\ 3x - y - z = 0 \\ 0,7x + 0,6y + 0,8z = 57 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 80 \\ 3x - y - z = 0 \\ 7x + 6y + 8z = 570 \end{array} \right\}$$

Como ya sabemos que $x = 20$, sustituimos:

$$\left. \begin{array}{l} 20 + y + z = 80 \\ 60 - y - z = 0 \\ 140 + 6y + 8z = 570 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 60 \\ 6y + 8z = 430 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -6y - 6z = -360 \\ 6y + 8z = 430 \end{array} \right\} \Rightarrow 2z = 70 \Rightarrow z = 35 ; y = 25$$

✓ El jersey cuesta 20 €, la camisa 25 € y el pantalón 35 €.

⇒ **Error común:** Escribir el precio rebajado como $0,3x$ en lugar de $0,7x$. Si hay un descuento del 30 %, el cliente paga el **70 %** del precio original, no el 30 %.

BLOQUE OPTATIVO 1 · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - ax + 2 - 2 \cos(x)}{e^x - x \cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Resolución

Evalúamos en $x = 0$: obtenemos $\frac{0}{0}$, así que aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - a + 2 \sin(x)}{e^x - \cos(x) + x \sin(x)} = \frac{1 - a}{0}$$

Como el límite es finito, el numerador también debe tender a 0, luego $1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$.
Con $a = 1$ seguimos aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + 2 \sin(x)}{e^x - \cos(x) + x \sin(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + 2 \cos(x)}{e^x + \sin(x) + \sin(x) + x \cos(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

✓ $a = 1$ y el valor del límite es 2.

$\Rightarrow$ **Error común:** Aplicar L'Hôpital sin comprobar que se tiene $\frac{0}{0}$ antes de cada aplicación. Aquí es necesario aplicarlo dos veces, y la primera nos da la condición sobre a .

BLOQUE OPTATIVO 1 · Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \frac{\ln(x)}{x^2}$.

- a) [1 punto] Calcula a para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f .
- b) [1,5 puntos] Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . Estudia y halla los extremos relativos.

Resolución

Apartado a)

Para que $y = 1$ sea asíntota horizontal necesitamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{\ln(x)}{x^2} \right) = a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{2x} = a + 0 = a$$

Para que la asíntota sea $y = 1$: $a = 1$.

✓ $a = 1$.

Apartado b)

Con $a = 0$: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$. Calculamos la derivada por la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

Igualamos $f'(x) = 0$. Como $x^3 > 0$ en $(0, +\infty)$:

$$1 - 2 \ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

Intervalo	$1 - 2 \ln(x)$	$f'(x)$	f
$(0, \sqrt{e})$	+	+	Creciente ↗
$(\sqrt{e}, +\infty)$	−	−	Decreciente ↘

En $x = \sqrt{e}$, f' cambia de + a −: **máximo relativo**.

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}$$

✓ f crece en $(0, \sqrt{e})$, decrece en $(\sqrt{e}, +\infty)$ y tiene un máximo relativo en $x = \sqrt{e}$ con valor $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$.

⇒ **Error común:** Olvidar aplicar correctamente la regla del cociente: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, con $u = \ln(x)$ y $v = x^2$.

BLOQUE OPTATIVO 2 · Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Sean los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, -2)$, $B(1, 2, m)$ y $C(2, 3, 2)$.

a) [1,25 puntos] Halla los valores de m para que el tetraedro determinado por O , A , B y C tenga un volumen de 3 unidades cúbicas.

b) [1,25 puntos] Para $m = 0$, calcula la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A , B y C .

Resolución**Apartado a)**

Calculamos los vectores $\overrightarrow{OA} = (0, 2, -2)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 2, m)$ y $\overrightarrow{OC} = (2, 3, 2)$. El volumen del tetraedro será:

$$V = 3 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 18 = |4m - 2| \Rightarrow \begin{cases} 4m - 2 = 18 \Rightarrow m = 5 \\ -4m + 2 = 18 \Rightarrow m = -4 \end{cases}$$

✓ $m = 5$ o $m = -4$.

⇒ **Error común:** Olvidar el valor absoluto al igualar el determinante, lo que hace perder una de las dos soluciones.

Apartado b)

Con $m = 0$: el plano viene definido por el punto $A(0, 2, -2)$ y los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 1, 4)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y - 2 & 0 & 1 \\ z + 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + z + 2 = 0$$

Calculamos la distancia de $O(0, 0, 0)$ al plano:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,89 \text{ u}$$

✓ **Distancia** = $\frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,89$ unidades.

⇒ **Error común:** Cometer errores de signo al desarrollar el determinante 3×3 . Recuerda que el elemento central de la primera fila siempre lleva signo $-$.

BLOQUE OPTATIVO 2 · Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Considera el punto $P(1, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$.

- a) [1 punto] Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r .
b) [1,5 puntos] Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r .

Resolución**Apartado a)**

La recta r pasa por $Q(1, 2, 3)$ con vector director $\vec{v} = (1, 2, 2)$. Tomamos $\vec{v}$ y $\overrightarrow{QP} = (0, -1, -2)$ para construir el plano:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 2, -1)$$

Ecuación del plano usando $P(1, 1, 1)$:

$$-2(x-1) + 2(y-1) - 1(z-1) = 0 \Rightarrow -2x + 2y - z + 1 = 0$$

✓ **Plano:** $-2x + 2y - z + 1 = 0$.

Apartado b)

Buscamos el pie de la perpendicular F desde P a r . Un punto genérico de r : $F = (1 + \lambda, 2 + 2\lambda, 3 + 2\lambda)$.

Para que $\overrightarrow{PF} \perp r$, imponemos $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{v} = 0$:

$$\overrightarrow{PF} = (\lambda, 1 + 2\lambda, 2 + 2\lambda)$$

$$\lambda \cdot 1 + (1 + 2\lambda) \cdot 2 + (2 + 2\lambda) \cdot 2 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$F = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{PF} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \sim (-2, -1, 2)$$

La recta buscada pasa por $P(1, 1, 1)$ con dirección $(-2, -1, 2)$:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

✓ **Recta perpendicular:** $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

$\Rightarrow$ **Error común:** Confundir la dirección de la recta perpendicular con la de r . La dirección que buscamos es $\overrightarrow{PF}$, el vector que va de P al pie de la perpendicular.

BLOQUE OPTATIVO 3 · Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Halla la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e - 2 - 2 \ln 2)$ y $(1, 0)$, y verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$.

Resolución

Integramos dos veces para calcular la expresión de $f(x)$:

$$f'(x) = \int \left(e^{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = e^{x-1} - \ln |x| + C$$

Calculamos $f(x) = \int \left(e^{x-1} - \ln |x| + C \right) dx$. Hacemos la integral de $\ln |x|$ por partes:

$$u = \ln(x) ; du = \frac{1}{x} dx \quad dv = dx ; v = x$$

$$f(x) = e^{x-1} - \left[x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right] + Cx + D = e^{x-1} - x \ln |x| + x + Cx + D$$

Calculamos las constantes C y D :

$$f(1) = 0 \Rightarrow e^0 - \ln 1 + 1 + C + D = 0 \Rightarrow C + D = -2$$

$$f(2) = e - 2 - 2 \ln 2 \Rightarrow e - 2 \ln 2 + 2 + 2C + D = e - 2 - 2 \ln 2 \Rightarrow 2C + D = -4$$

$$\text{Resolvemos el sistema } \left. \begin{array}{l} C + D = -2 \\ 2C + D = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow C = -2 ; D = 0$$

Luego la función es: $f(x) = e^{x-1} - x \ln |x| + x - 2x$

$$\checkmark \quad f(x) = e^{x-1} - x \ln |x| - x.$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar que $\int \ln(x) dx$ no es $\frac{1}{x}$, sino que requiere integración por partes, dando $x \ln(x) - x$.

BLOQUE OPTATIVO 3 · Ejercicio 7 (2,5 puntos)

En la tabla siguiente se recoge el número de coches y motos que se presentaron a la ITV en el año 2023. Se elige un vehículo al azar.

a) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto?

b) [1,25 puntos] Si el vehículo elegido es un coche, ¿cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

Resolución

Completamos la tabla:

	Coches	Motos	TOTAL
Aptos	116.383	160.667	277.050
No aptos	2.679	3.447	6.126
TOTAL	119.062	164.114	283.176

Apartado a)

$$P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = \frac{164,114}{283,176} + \frac{277,050}{283,176} - \frac{160,667}{283,176} = \frac{280,497}{283,176} \approx 0,9905$$

✓ $P(\text{Moto} \cup \text{Apto}) \approx 0,9905$

Apartado b)

$$P(\text{No apto} \mid \text{Coche}) = \frac{P(\bar{A} \cap C)}{P(C)} = \frac{2,679}{119,062} \approx 0,0225$$

✓ $P(\text{No apto} \mid \text{Coche}) \approx 0,0225$

⇒ **Error común:** En el apartado a), olvidar restar $P(M \cap A)$. Sin esa resta se cuentan las motos aptas dos veces.

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas II · Junio 2025