
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2024 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D) de 2 ejercicios cada uno. Se resuelve **un ejercicio por bloque**. Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

BLOQUE A · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, y los puntos de su gráfica $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$.

a) [1,5 puntos] Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es paralela a la recta que pasa por A y B .

b) [1 punto] Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A .

Resolución**Apartado a)**

Calculamos la pendiente de la recta AB :

$$m_{AB} = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

La pendiente de la tangente a f es $f'(x) = \frac{1}{x}$. Igualamos:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e - 1} \Rightarrow x = e - 1$$

El punto de la gráfica es $(e - 1, f(e - 1)) = (e - 1, \ln(e - 1))$.

✓ **El punto buscado es** $(e - 1, \ln(e - 1))$.

Apartado b)

La tangente en $A(1, 0)$ tiene pendiente $f'(1) = 1$. La recta normal es perpendicular, luego su pendiente es $m_n = -1$. Ecuación por $A(1, 0)$:

$$y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

✓ **Recta normal:** $y = -x + 1$.

⇒ **Error común:** Confundir recta tangente con recta normal. La normal tiene pendiente $m_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$, es decir la inversa cambiada de signo.

BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Considera la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - a \sin(x)}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ b \cos(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula a y b .

Resolución

Para que f sea continua en $x = 0$, el límite lateral izquierdo debe coincidir con $f(0)$.

Valor desde la derecha: $f(0) = b \cos(0) - 1 = b - 1$

Límite desde la izquierda: evaluamos en $x = 0$ y obtenemos $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cos(x) - a \sin(x)}{x^3} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x) - x \sin(x) - a \cos(x)}{3x^2} = \frac{1-a}{0}$$

Como f es continua (límite finito), el numerador debe tender a 0: $1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$

Con $a = 1$, nueva indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital de nuevo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x) - x \sin(x) - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sin(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(x)}{3x} = -\frac{1}{3}$$

Condición de continuidad:

$$b - 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$\checkmark \quad a = 1 \quad \text{y} \quad b = \frac{2}{3}.$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar que la condición $a = 1$ es la que garantiza que el límite existe y es finito. Sin esa condición, L'Hôpital no puede aplicarse una segunda vez.

BLOQUE B · Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$, para $x \neq -1$, $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 1)$.

Resolución

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, dividimos primero:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

Descomponemos $\frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)}$ en fracciones parciales:

$$\frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Rightarrow x + 2 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

$$x = 1 : 3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2} \quad x = -1 : 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Integramos:

$$F(x) = \int \left(x + \frac{3/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C$$

Aplicamos la condición $F(0) = 1$:

$$0 + \frac{3}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\checkmark \quad F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + 1$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Intentar integrar directamente sin hacer la división previa. Cuando el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, hay que dividir primero.

BLOQUE B · Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Halla la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x \cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi, 2\pi)$.

Resolución

Calculamos $f'(x) = \int x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = x ; du = dx \quad dv = \cos(x) dx ; v = \sin(x)$$

$$f'(x) = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C_1$$

Calculamos $f(x) = \int (x \sin(x) + \cos(x) + C_1) dx$. Integramos $\int x \sin(x) dx$ por partes:

$$u = x ; du = dx \quad dv = \sin(x) dx ; v = -\cos(x)$$

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x)$$

Luego:

$$f(x) = -x \cos(x) + \sin(x) + \sin(x) + C_1 x + C_2 = -x \cos(x) + 2 \sin(x) + C_1 x + C_2$$

Calculamos las constantes con las condiciones iniciales:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + C_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$f(\pi) = 2\pi \Rightarrow -\pi \cos(\pi) + 2 \sin(\pi) + C_1 \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow \pi + 0 + C_1 \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$

$$\checkmark \quad f(x) = -x \cos(x) + 2 \sin(x) + \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** En la segunda integración por partes, olvidar que $\int \cos(x) dx$ aparece dos veces (una de $\int x \sin(x) dx$ y otra suelta) y no sumarlas correctamente.

BLOQUE C · Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Calcula A^{2024} .

b) [1,5 puntos] Halla la matriz X , si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3.

Resolución**Apartado a)**

Escribimos $A = I + N$ donde $N = \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Observamos que $N^2 = O$ (todos los productos dan 0). Usando el binomio $(I + N)^n = I + nN$ cuando $N^2 = O$:

$$A^{2024} = I + 2024N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 253 & 253 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Apartado b)

De $A^2XA + I = O$ despejamos: $A^2XA = -I \Rightarrow X = -(A^2)^{-1}A^{-1}$

Como $N^2 = O$: $A^2 = I + 2N$, $A^{-1} = I - N$, $(A^2)^{-1} = I - 2N$.

$$(A^2)^{-1}A^{-1} = (I - 2N)(I - N) = I - 3N + 2N^2 = I - 3N = \begin{pmatrix} 1 & -3/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = -(I - 3N) = \begin{pmatrix} -1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Intentar calcular A^{2024} multiplicando sucesivamente. La clave es identificar $A = I + N$ con $N^2 = O$ para aplicar el binomio en un solo paso.

BLOQUE C · Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Considera el sistema

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores de k .

b) [0,75 puntos] Para $k = 1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y = 0$? En caso afirmativo, calcúlala.

Resolución**Apartado a)**

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{vmatrix} = -(k-2) + (k-1)^2 - 1 = (k-1)(k-2)$$

$$k \neq 1 \text{ y } k \neq 2: \det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{SCD}$$

$$k = 2: \operatorname{rg}(A) = 2, \operatorname{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{SI}$$

$$k = 1: \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2 < 3 \Rightarrow \text{SCI}$$

Para $k = 2$, la matriz ampliada tiene filas 2 y 3 con mismos coeficientes pero términos independientes distintos ($2 \neq 0$), confirmando SI.

Para $k = 1$, las filas 1 y 2 son idénticas, confirmando SCI.

$$\checkmark \quad k \neq 1, 2: \text{SCD} \quad k = 1: \text{SCI} \quad k = 2: \text{SI}$$

Apartado b)

Con $k = 1$ el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\lambda; y = 1 - \lambda; z = \lambda$$

$$\text{Para } y = 0: 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (-1, 0, 1)$$

$$\checkmark \quad \text{Solución general: } x = -\lambda, y = 1 - \lambda, z = \lambda. \quad \text{Sí existe solución con } y = 0: (-1, 0, 1).$$

$\Rightarrow$ **Error común:** En la discusión, anular el determinante solo indica que no hay solución única, pero no distingue entre SCI y SI. Hay que estudiar la matriz ampliada en cada caso particular.

BLOQUE D · Ejercicio 7 (2,5 puntos)

- a) [1,25 puntos] Halla el punto simétrico de $P(2, 2, 1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$
- b) [1,25 puntos] Halla el punto simétrico de $Q(1, -1, -3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$.

Resolución**Apartado a)**

Un punto genérico de r : de $y - z = 1 \Rightarrow y = t + 1$; de $x - 2y + z = 2 \Rightarrow x = t + 4$.
Tomamos $z = t$:

$$F = (t + 4, t + 1, t)$$

El vector director de r es $\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Imponemos $\overrightarrow{PF} \perp \vec{v}_r$, es decir $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{v}_r = 0$:

$$\overrightarrow{PF} = (t + 2, t - 1, t - 1)$$

$$(t + 2) + (t - 1) + (t - 1) = 0 \Rightarrow 3t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow F = (4, 1, 0)$$

El simétrico P' verifica que F es el punto medio de P y P' :

$$P' = (2 \cdot 4 - 2, 2 \cdot 1 - 2, 2 \cdot 0 - 1) = (6, 0, -1)$$

$$\checkmark \quad P' = (6, 0, -1)$$

Apartado b)

La recta perpendicular a π por Q tiene dirección $\vec{n} = (1, -2, 1)$:

$$(x, y, z) = (1 + t, -1 - 2t, -3 + t)$$

Buscamos el pie H sustituyendo en π :

$$(1 + t) - 2(-1 - 2t) + (-3 + t) + 6 = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H = (0, 1, -4)$$

El simétrico Q' verifica que H es el punto medio de Q y Q' :

$$Q' = (2 \cdot 0 - 1, 2 \cdot 1 - (-1), 2 \cdot (-4) - (-3)) = (-1, 3, -5)$$

$$\checkmark \quad Q' = (-1, 3, -5)$$

⇒ **Error común:** En el apartado a), olvidar que el pie de la perpendicular F debe pertenecer a r , parametrizando r e imponiendo $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{v}_r = 0$ para encontrar t .

BLOQUE D · Ejercicio 8 (2,5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

a) [1 punto] Estudia la posición relativa de r y s .

b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

Resolución**Apartado a)**

Vector director de r : $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 0, -2)$ Punto de r : $P_r = (0, 0, 0)$

Vector director de s : $\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0)$ Punto de s : $P_s = (-7, 0, 0)$

No son proporcionales ($\vec{v}_r \not\propto \vec{v}_s$), luego no son paralelas. Calculamos:

$$\begin{vmatrix} -7 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7(0 - 2) - 0 + 0 = 14 \neq 0$$

✓ Las rectas r y s se cruzan.

Apartado b)

El vector normal al plano es $\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, 1)$$

El plano buscado tiene la forma $-2x - 2y + z = d$. Imponemos que equidiste de $P_r = (0, 0, 0)$ y $P_s = (-7, 0, 0)$:

$$d_{P_r} = \frac{|d|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|d|}{3} \quad d_{P_s} = \frac{|14-d|}{3}$$

$$|d| = |14-d| \Rightarrow d = 14-d \Rightarrow d = 7$$

Verificamos: $\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (-2)(-1) + (-2)(0) + (1)(-2) = 0$ ✓ $\vec{n} \cdot \vec{v}_s = (-2)(1) + (-2)(-1) + (1)(0) = 0$ ✓

✓ Plano: $2x + 2y - z + 7 = 0$

⇒ **Error común:** Al equidistar, plantear $d_{P_r} = d_{P_s}$ sin el valor absoluto puede hacer perder soluciones. Además, siempre hay que verificar que el plano hallado es paralelo a

r y s comprobando $\vec{n} \perp \vec{v}_r$ y $\vec{n} \perp \vec{v}_s$.

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas II · Junio 2024