
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2023 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno. Se resuelven **4 ejercicios en total**, independientemente del bloque. Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

BLOQUE A · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

a) [1,5 puntos] Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1 punto] Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x))$.

Resolución**Apartado a)**

Calculamos $f'(x)$ por la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{-(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Igualamos $f'(x) = 0$: $e^{-x} - e^x = 0 \Rightarrow e^{-x} = e^x \Rightarrow x = 0$

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

Intervalo	$e^{-x} - e^x$	$f'(x)$	f
$(-\infty, 0)$	+	+	Creciente ↗
$(0, +\infty)$	-	-	Decreciente ↘

En $x = 0$, f' cambia de + a -: **máximo**.

$$f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ siempre, el máximo es **absoluto** y no existe mínimo absoluto (el ínfimo es 0 pero no se alcanza).

✓ **Máximo absoluto:** $f(0) = \frac{1}{2}$ en $x = 0$. No existe mínimo absoluto.

Apartado b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x + e^{-x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x - e^{-x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 0$$

✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x)) = 0$

⇒ **Error común:** Aplicar L'Hôpital una sola vez y detenerse. Como el resultado sigue siendo $\frac{\infty}{\infty}$, hay que aplicarlo una segunda vez.

BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Sea la función $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

a) [1,5 puntos] Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

b) [1 punto] Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

Resolución**Apartado a)**

Calculamos $f(-2) = 1$ y $f(2) = 9$. Pendiente de la recta por $(-2, 1)$ y $(2, 9)$:

$$m = \frac{9 - 1}{2 - (-2)} = \frac{8}{4} = 2$$

La pendiente de la tangente es $f'(x) = 3x^2 - 2$. Igualamos:

$$3x^2 - 2 = 2 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ambos valores pertenecen a $[-2, 2]$ ✓

$$\checkmark \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Apartado b)

Hallamos el punto de inflexión con $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ; \quad f(0) = 5$$

Punto de inflexión: $(0, 5)$. Pendiente de la tangente: $f'(0) = -2$.

Recta tangente: $y - 5 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 5$

Recta normal: pendiente $m_n = \frac{1}{2}$:

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5$$

$$\checkmark \quad \text{Tangente: } y = -2x + 5 \quad \text{Normal: } y = \frac{1}{2}x + 5$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Confundir punto de inflexión con extremo relativo. El punto de inflexión se obtiene igualando $f''(x) = 0$ y verificando que f'' cambia de signo.

BLOQUE A · Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x - 1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

Resolución

Paso 1 — Recta tangente en $x = 0$.

Escribimos f sin valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & x < 1 \\ x^2 - x & x \geq 1 \end{cases}$$

En $x = 0$ (zona $x < 1$): $f(0) = 0$, $f'(x) = -2x + 1$, $f'(0) = 1$.

Recta tangente: $y = x$

Paso 2 — Intersecciones de f con $y = x$.

$$\text{Zona } x < 1 : -x^2 + x = x \Rightarrow -x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Zona } x \geq 1 : x^2 - x = x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

Intersecciones en $x = 0$ y $x = 2$.

Paso 3 — Área.

En $[0, 1]$: $x - (-x^2 + x) = x^2 \geq 0 \checkmark$ En $[1, 2]$: $x - (x^2 - x) = 2x - x^2 \geq 0 \checkmark$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \left[\left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \end{aligned}$$

✓ **Área = 1 unidad cuadrada.**

⇒ **Error común:** No separar la integral en dos tramos al trabajar con $|x - 1|$. Es imprescindible quitar el valor absoluto antes de integrar.

BLOQUE A · Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Considera la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\sin(x^2)}$.

Resolución

Evaluamos en $x = 0$: obtenemos $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + x F'(x)}{2x \cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + x \sin(x^2)}{2x \cos(x^2)} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital de nuevo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x) + \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)}{2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) + \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)}{2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)} = \frac{0 + 0 + 0}{2 - 0} = 0$$

donde hemos usado que $F'(x) = \sin(x^2)$ por el Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\checkmark \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\sin(x^2)} = 0$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar que $F'(x) = \sin(x^2)$ por el Teorema Fundamental del Cálculo. Esta es la clave para derivar el numerador correctamente en la primera aplicación de L'Hôpital.

BLOQUE B · Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Una marca de vehículos ha vendido coches de tres colores: blancos (B), negros (N) y rojos (R). El 60 % de los blancos más el 50 % de los negros representan el 30 % del total. El 20 % de los blancos junto con el 60 % de los negros y el 60 % de los rojos representan la mitad del total. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Resolución

Planteamos el sistema. De las condiciones porcentuales:

$$\left. \begin{array}{l} 0,6B + 0,5N = 0,3(B + N + R) \\ 0,2B + 0,6N + 0,6R = 0,5(B + N + R) \\ N - B = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3B + 2N - 3R = 0 \\ -3B + N + R = 0 \\ N - B = 100 \end{array} \right\}$$

Sumamos las dos primeras ecuaciones: $3N - 2R = 0 \Rightarrow R = \frac{3N}{2}$

De la segunda: $-3B + N + \frac{3N}{2} = 0 \Rightarrow B = \frac{5N}{6}$

De la tercera: $N - \frac{5N}{6} = 100 \Rightarrow \frac{N}{6} = 100 \Rightarrow N = 600$

Entonces: $B = 500$ y $R = 900$

✓ **Blancos: 500, Negros: 600, Rojos: 900.**

⇒ **Error común:** No simplificar las ecuaciones porcentuales correctamente. Hay que pasar todo al mismo lado antes de operar para obtener el sistema con coeficientes enteros.

BLOQUE B · Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [0,5 puntos] Determina para qué valores de m existe la inversa de A .
b) [2 puntos] Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación $AX + X = B$.

Resolución**Apartado a)**

$$\det(A) = m^3 \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$$

✓ A^{-1} existe para todo $m \neq 0$.

Apartado b)

Factorizamos: $AX + X = (A + I)X = B$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A + I) = 1 + m^3 = (1 + m)(1 - m + m^2)$$

Para $m \neq -1$: $\det(A + I) \neq 0$, luego existe $(A + I)^{-1}$ y podemos despejar $X = (A + I)^{-1}B$.

Calculamos la inversa por adjuntos:

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{1 + m^3} \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por B :

$$X = \frac{1}{1 + m^3} \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + m^3} \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

✓
$$X = \frac{1}{1 + m^3} \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

⇒ **Error común:** No factorizar $AX + X$ como $(A + I)X$. Sin esa factorización no se puede despejar X directamente.

BLOQUE B · Ejercicio 7 (2,5 puntos)

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A , B y C . Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A , B y C .

Resolución

Punto medio M y vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{8+6}{2} \right) = (1, 2, 7) \quad \overrightarrow{PQ} = (2, -2, -2) \sim (1, -1, -1)$$

Ecuación del plano (normal $\vec{n} = (1, -1, -1)$, pasa por $M(1, 2, 7)$):

$$1(x - 1) - 1(y - 2) - 1(z - 7) = 0 \Rightarrow x - y - z + 8 = 0$$

Cortes con los ejes:

$$\text{Eje } X \ (y = 0, z = 0) : x + 8 = 0 \Rightarrow A = (-8, 0, 0)$$

$$\text{Eje } Y \ (x = 0, z = 0) : -y + 8 = 0 \Rightarrow B = (0, 8, 0)$$

$$\text{Eje } Z \ (x = 0, y = 0) : -z + 8 = 0 \Rightarrow C = (0, 0, 8)$$

Área del triángulo ABC :

$$\vec{AB} = (8, 8, 0) \quad \vec{AC} = (8, 0, 8)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (64, -64, -64) = 64(1, -1, -1)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 64\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$$

✓ Área del triángulo $ABC = 32\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

⇒ **Error común:** Calcular la ecuación del plano usando un punto cualquiera en lugar del punto medio M . El enunciado especifica que el plano pasa por el punto medio del segmento.

BLOQUE B · Ejercicio 8 (2,5 puntos)

Considera el punto $A(-1, 1, 3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2, 1, 1)$ y $C(0, 1, -1)$.

- a) [1,5 puntos] Halla la distancia del punto A a la recta r .
b) [1 punto] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A , B y C .

Resolución**Apartado a)**

Vector director de r : $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (-2, 0, -2) \sim (1, 0, 1)$

Un punto genérico de r partiendo de B : $F = (2 + t, 1, 1 + t)$

$$\overrightarrow{AF} = (3 + t, 0, -2 + t)$$

Imponemos $\overrightarrow{AF} \cdot \vec{v} = 0$:

$$(3 + t) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2 + t) \cdot 1 = 0 \Rightarrow 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow F = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$d = |\overrightarrow{AF}| = \left| \left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{5}{2}\right) \right| = \frac{5}{2}\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

✓ Distancia = $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ unidades.

Apartado b)

$$\vec{AB} = (3, 0, -2) \quad \vec{AC} = (1, 0, -4)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (0)\vec{i} - (-12 + 2)\vec{j} + (0)\vec{k} = (0, 10, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

✓ Área del triángulo $ABC = 5$ unidades cuadradas.

⇒ **Error común:** En el apartado a), no encontrar el pie de la perpendicular F imponiendo $\overrightarrow{AF} \cdot \vec{v} = 0$. Sin ese paso no se puede calcular la distancia correctamente.