
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2022 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno. Se resuelven **4 ejercicios en total**, independientemente del bloque. Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

BLOQUE A · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Considera la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcula a y b . (1 punto)

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . (1,5 puntos)

Resolución**Apartado a)**

Para que f sea continua imponemos la continuidad en $x = -1$ y $x = 1$:

En $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{-1} = -1 \quad ; \quad f(-1) = -a + b$$
$$-a + b = -1$$

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b \quad ; \quad f(1) = \frac{1}{2}$$
$$a + b = \frac{1}{2}$$

Resolvemos el sistema
$$\left. \begin{array}{l} -a + b = -1 \\ a + b = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 2b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{4} ; a = \frac{3}{4}$$

$$\checkmark \quad a = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad b = -\frac{1}{4}$$

Apartado b)

Asíntotas verticales: f es continua en todo su dominio y no hay denominadores que se anulen en el rango de cada tramo. **No hay asíntotas verticales.**

Asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{AH: } y = 0 \text{ en } -\infty$$

Asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$
$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

✓ **Asíntota horizontal** $y = 0$ en $x \rightarrow -\infty$. **Asíntota oblicua** $y = x - 1$ en $x \rightarrow +\infty$.

⇒ **Error común:** Buscar asíntotas verticales solo donde el denominador se anula, sin comprobar si ese punto pertenece al tramo correspondiente. En funciones definidas a trozos, hay que verificar que la singularidad pertenece al dominio del tramo.

BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$.

Resolución

Paso 1 — Puntos de intersección.

$$4 - \frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{6} - 2 \Rightarrow 6 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

Paso 2 — Altura del rectángulo.

$$h(x) = f(x) - g(x) = \left(4 - \frac{x^2}{3}\right) - \left(\frac{x^2}{6} - 2\right) = 6 - \frac{x^2}{2}$$

Paso 3 — Área del rectángulo (base $2x$, altura $h(x)$):

$$A(x) = 2x \cdot \left(6 - \frac{x^2}{2}\right) = 12x - x^3 \quad ; \quad x \in (0, 2\sqrt{3})$$

Paso 4 — Maximizar.

$$A'(x) = 12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$A''(x) = -6x < 0 \quad \checkmark \quad (\text{máximo})$$

$$\text{Dimensiones: base} = 2x = 4, \text{ altura} = 6 - \frac{4}{2} = 4.$$

✓ **El rectángulo de área máxima tiene dimensiones 4×4 (cuadrado) con área = 16 u².**

⇒ **Error común:** Usar solo la altura $f(x)$ en lugar de $f(x) - g(x)$ como altura del rectángulo. La altura es la distancia entre las dos curvas, no la ordenada de una sola de ellas.

BLOQUE A · Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 0 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica. (1 punto)

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas. (1,5 puntos)

Resolución**Apartado a)**

Tramo $x < 0$: $2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ✓ Punto: $(-2, 0)$

Tramo $x \geq 0$: $(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ✓ Punto: $(2, 0)$

✓ Puntos de corte con el eje OX : $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Apartado b)

El recinto acotado se forma entre $x = -2$ y $x = 2$, donde $f(x) \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^0 (2x + 4) dx + \int_0^2 (x - 2)^2 dx \\ &= [x^2 + 4x]_{-2}^0 + \left[\frac{(x - 2)^3}{3} \right]_0^2 \\ &= (0) - (4 - 8) + \left(0 - \frac{(-2)^3}{3} \right) = 4 + \frac{8}{3} = \frac{12 + 8}{3} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

✓ Área = $\frac{20}{3}$ unidades cuadradas.

⇒ **Error común:** No identificar correctamente el recinto acotado. Hay que determinar entre qué valores de x la función delimita un recinto cerrado con el eje de abscisas, y separar la integral en los tramos de la función.

BLOQUE A · Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$ para $x \neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2, 6)$.

Resolución

Dividimos x^3 entre $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$:

$$\frac{x^3}{(x - 1)^2} = x + 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

Descomponemos $\frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$ en fracciones parciales:

$$\frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} \Rightarrow 3x - 2 = A(x - 1) + B$$

$$x = 1 : 1 = B \quad \text{Coef. } x : 3 = A \Rightarrow \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{3}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

Integramos:

$$F(x) = \int \left(x + 2 + \frac{3}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + C$$

Aplicamos $F(2) = 6$:

$$2 + 4 + 3 \ln 1 - 1 + C = 6 \Rightarrow 5 + C = 6 \Rightarrow C = 1$$

$$\checkmark \quad F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + 1$$

$\Rightarrow$ **Error común:** No hacer la división previa cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador. Aquí x^3 tiene grado 3 y $(x - 1)^2$ grado 2, por lo que la división es imprescindible antes de descomponer en fracciones parciales.

BLOQUE B · Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . **(1,75 puntos)**
 b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible. **(0,75 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & m \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -m & -1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + m \cdot \begin{vmatrix} -m & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (3m - 4) + (-m^2 + 1) + m(4m - 3) = 3m - 4 - m^2 + 1 + 4m^2 - 3m = 3m^2 - 3 = 3(m^2 - 1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = 1 \text{ o } m = -1$$

Si $m \neq \pm 1$: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ **SCD**.

Si $m = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2+F_1; F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$$F_2 \Rightarrow y = -1 \quad F_3 \Rightarrow y = 1 \quad \text{Contradicción} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2, \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{SI.}$$

Si $m = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2-F_1; F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$$F_2 \Rightarrow y = 1 \quad F_3 \Rightarrow y = 1 \quad \checkmark \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3 \Rightarrow \text{SCI.}$$

$\checkmark$ $m \neq \pm 1$: **SCD** $m = 1$: **SI** $m = -1$: **SCI**

Apartado b)

$m = 2 \Rightarrow |A| = 3(4 - 1) = 9 \neq 0 \Rightarrow$ SCD. Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2+2F_1; F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \end{array} \right)$$

$$z = -2; y = 1; x = 2$$

$$\checkmark \quad x = 2, \quad y = 1, \quad z = -2.$$

⇒ **Error común:** Anular el determinante no distingue entre SCI y SI. Siempre hay que estudiar los rangos de A y A^* para cada valor crítico de m .

BLOQUE B · Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A ? (1 punto)

b) Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (1,5 puntos)

Resolución**Apartado a)**

$$\begin{aligned} |A| &= m(m^2 - 1) - \sqrt{m}(\sqrt{m} \cdot m - \sqrt{m}) + \sqrt{m}(\sqrt{m} - m\sqrt{m}) \\ &= m(m^2 - 1) - m(m - 1) - m(m - 1) = m(m - 1)(m + 1) - 2m(m - 1) = m(m - 1)^2 \\ |A| &= 0 \Rightarrow m = 0 \text{ o } m = 1 \end{aligned}$$

✓ A^{-1} existe para $m > 0$, $m \neq 1$.

Apartado b)

$AX = 12I \Rightarrow X = 12A^{-1}$. Con $m = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = 4(4 - 1)^2 = 36$$

Calculamos A^{-1} por adjuntos:

$$\begin{aligned} \text{Adj}(A) &= \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} \\ X &= \frac{12}{36} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** En el apartado a), no factorizar correctamente el determinante. La clave está en sacar factor común $m(m - 1)$ tras expandir para obtener $m(m - 1)^2$.

BLOQUE B · Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = 0 : -1 + 2a + 3b = 0$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 : 2 + 0 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{Sustituyendo: } -1 + 2a + 6 = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

$$\checkmark \quad a = -\frac{5}{2} \quad \text{y} \quad b = 2$$

Apartado b)

Los cuatro vértices tienen la forma P , $P + \vec{u}$, $P + \vec{v}$, $P + \vec{u} + \vec{v}$. La diagonal de $O(0, 0, 0)$ a $A(-4, 4, 7)$ implica:

$$P + (P + \vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{OA} \Rightarrow 2P + \vec{u} + \vec{v} = (-4, 4, 7)$$

$$2P = (-4, 4, 7) - (-1, 2, 3) - (2, 0, -1) = (-4, 4, 7) - (1, 2, 2) = (-5, 2, 5) \Rightarrow P = \left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$$

Los cuatro vértices son:

$$\begin{aligned} P &= \left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{5}{2}\right) & P + \vec{u} &= \left(-\frac{7}{2}, 3, \frac{11}{2}\right) \\ P + \vec{v} &= \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) & P + \vec{u} + \vec{v} &= (-4, 4, 7) = A \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \text{Vértices: } \left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{5}{2}\right), \quad \left(-\frac{7}{2}, 3, \frac{11}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) \quad \text{y} \quad (-4, 4, 7).$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Confundir qué diagonal es $\overrightarrow{OA}$. Significa que va de $O(0, 0, 0)$ a $A(-4, 4, 7)$, por lo que la suma de los dos vértices opuestos que forman esa diagonal debe ser igual a $\overrightarrow{OA} = (-4, 4, 7)$.

BLOQUE B · Ejercicio 8 (2,5 puntos)

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$, así como la recta s determinada por el punto $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\vec{v} = (1 + a, -a, 3a)$.

- a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**
 b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

Resolución**Apartado a)**

r pasa por $Q(2, 0, 1)$ con $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$. s pasa por $P(1, 2, 3)$ con $\vec{v}_s = (1 + a, -a, 3a)$. Para que se corten, el determinante formado por $\overrightarrow{QP}$, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ debe ser 0:

$$\overrightarrow{QP} = (-1, 2, 2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 + a & -a & 3a \end{vmatrix} = 0$$

$$-1(-3a + 2a) - 2(3a - 2 - 2a) + 2(-(-a) + (-(1 + a)) \cdot (-1))$$

Desarrollando por la primera fila:

$$-1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -a & 3a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 + a & 3a \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 + a & -a \end{vmatrix} = 0$$

$$-1(-3a + 2a) - 2(3a - 2 - 2a) + 2(-a + 1 + a) = 0$$

$$a - 2(a - 2) + 2 = 0 \Rightarrow a - 2a + 4 + 2 = 0 \Rightarrow -a + 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

$$\checkmark \quad a = 6$$

Apartado b)

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 : (1)(1 + a) + (-1)(-a) + (2)(3a) = 0$$

$$1 + a + a + 6a = 0 \Rightarrow 8a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

$$\checkmark \quad a = -\frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** En el apartado a), usar la condición de paralelismo ($\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \vec{0}$) en lugar de la condición de intersección (determinante de $\overrightarrow{QP}$, $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ igual a 0).

Resolución elaborada por **EstudiantePlus** · *estudiante.plus*
PAU Andalucía · Matemáticas II · Junio 2022