
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Junio 2020 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 8 ejercicios sin bloques diferenciados. Se resuelven **4 ejercicios en total**. Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ para $x \neq 1, -1$.

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1,25 puntos)**
 b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1,25 puntos)**

Resolución

Apartado a)

El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{1, -1\}$.

Asíntotas Verticales: En principio son las rectas $x = 1$ y $x = -1$. Vamos a comprobarlo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x - 2}{2x} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x - 2}{2x} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Luego no tiene asíntota vertical en $x = -1$.

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2} = 1$$

Luego $y = 1$ es una asíntota horizontal. **No tiene asíntota oblicua**, ya que tiene asíntota horizontal.

✓ **AV:** $x = 1$. **AH:** $y = 1$. **Punto evitable** en $x = -1$, $f(-1) = 2$.

Apartado b)

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x^2 - 1) - (x^2 - 2x - 3) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 + 4x + 2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2(x + 1)^2}{(x^2 - 1)^2} \geq 0$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ No sirve, ya que no está en el dominio.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	+
Función	C	C	C

✓ **Creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. No hay extremos relativos.**

⇒ **Error común:** No comprobar si $x = -1$ es o no asíntota vertical antes de descartarla. También es frecuente olvidar que $x = -1$ no pertenece al dominio al estudiar los puntos críticos.

Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$.

Resolución

Para $x > 0$: $f(x) = xe^{3x} > 0$ ✓. Calculamos $\int_0^a xe^{3x} dx$ por partes:

$$u = x ; du = dx \quad dv = e^{3x} dx ; v = \frac{e^{3x}}{3}$$

$$\int xe^{3x} dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} = \frac{e^{3x}(3x - 1)}{9} + C$$

Evaluamos:

$$\left[\frac{e^{3x}(3x - 1)}{9} \right]_0^a = \frac{e^{3a}(3a - 1)}{9} - \frac{e^0(-1)}{9} = \frac{e^{3a}(3a - 1) + 1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$e^{3a}(3a - 1) + 1 = 1 \Rightarrow e^{3a}(3a - 1) = 0$$

$$\text{Como } e^{3a} > 0: 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\checkmark \quad a = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar evaluar el término en $x = 0$, donde $e^0 = 1$ y $3(0) - 1 = -1$, lo que da $\frac{-1}{9}$ que no es cero.

Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de A según los valores de m . (1,5 puntos)

b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$. (1 punto)

Resolución**Apartado a)**

$$\det(A) = 1(5-0) + 1(0-m(m+1)) + (m+2)(0-m) = 5 - m^2 - m - m^2 - 2m = 5 - 2m^2 - 3m$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow 2m^2 + 3m - 5 = 0 \Rightarrow (2m+5)(m-1) = 0 \Rightarrow m = 1 \quad \text{o} \quad m = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Si } m \neq 1 \text{ y } m \neq -\frac{5}{2}: \det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3.$$

$$\text{Si } m = 1 \text{ o } m = -\frac{5}{2}: \det(A) = 0. \text{ El menor } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2.$$

Valor de m	$\text{rg}(A)$
$m \neq 1 \text{ y } m \neq -\frac{5}{2}$	3
$m = 1 \quad \text{o} \quad m = -\frac{5}{2}$	2

Apartado b)

Con $m = 2$: $\det(A) = 5 - 8 - 6 = -9 \neq 0$. Usamos la propiedad $(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020}A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1} por adjuntos:

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{18180} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \quad (2020A)^{-1} = \frac{-1}{18180} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Calcular $(2020A)^{-1}$ sin usar la propiedad $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$. Recuerda que el escalar multiplica a toda la matriz y por tanto divide a la inversa.

Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{a}$ y $s \equiv \frac{x - 3}{-a} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$.

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a . **(1,25 puntos)**

b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1,25 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

$\vec{v}_r = (1, 1, a)$, $\vec{v}_s = (-a, -1, 2)$. Punto de r : $R(1, 2, 1)$. Punto de s : $S(3, 3, -1)$. $\overrightarrow{RS} = (2, 1, -2)$.

No son proporcionales para ningún $a \neq 0 \Rightarrow$ **nunca paralelas**.

Calculamos el determinante para distinguir si se cortan o se cruzan:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2 + a) - 1(2 + a^2) + (-2)(-1 + a) = 4 - a^2$$

Si $a \neq \pm 2$: $D \neq 0 \Rightarrow$ **se cruzan**.

Si $a = 2$ o $a = -2$: $D = 0 \Rightarrow$ **se cortan**.

Valor de a	Posición relativa
$a \neq \pm 2$	Se cruzan
$a = 2$ o $a = -2$	Se cortan

Apartado b)

Con $a = 2$: $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$, $\vec{v}_s = (-2, -1, 2)$.

Punto de corte: r : $(1 + t, 2 + t, 1 + 2t)$; s : $(3 - 2\lambda, 3 - \lambda, -1 + 2\lambda)$.

$$\left. \begin{array}{l} y: 2 + t = 3 - \lambda \Rightarrow t + \lambda = 1 \\ z: 1 + 2t = -1 + 2\lambda \Rightarrow t - \lambda = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow t = 0; \lambda = 1$$

Verificamos x : r da 1; s da $3 - 2 = 1$ ✓. Punto de corte: $(1, 2, 1)$.

Dirección de la recta perpendicular: $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 + 2)\vec{i} - (2 + 4)\vec{j} + (-1 + 2)\vec{k} = (4, -6, 1)$$

✓ **Recta:** $\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z - 1}{1}$

⇒ **Error común:** En el apartado a), olvidar que proporcionalidad de vectores directores indica paralelismo. Para distinguir entre que se cortan y que se cruzan hay que calcular el determinante D .

Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$.

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**

b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. **(0,5 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(2 - \cos(x)) - \sin(x) \cdot \sin(x)}{(2 - \cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) - \cos^2(x) - \sin^2(x)}{(2 - \cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}$$

El denominador $2 - \cos(x) \geq 1 > 0$ siempre. Igualamos $f'(x) = 0$:

$$2\cos(x) - 1 = 0 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

Intervalo	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
f	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Comparamos todos los candidatos a extremo absoluto:

$$f(0) = 0 \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}/2}{3/2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad f(2\pi) = 0$$

✓ **Máximo absoluto:** $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ en $x = \frac{\pi}{3}$. **Mínimo absoluto:** $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ en $x = \frac{5\pi}{3}$.

Apartado b)

En $x = \frac{\pi}{3}$: $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ (es extremo).

Tangente: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (horizontal).

Normal: $x = \frac{\pi}{3}$ (vertical).

✓ **Tangente:** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Normal:** $x = \frac{\pi}{3}$.

⇒ **Error común:** Al calcular f' , olvidar que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, lo que simplifica el numerador a $2 \cos x - 1$.

Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x - 2)^2}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x) dx$. **(2 puntos)**

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$. **(0,5 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

Dividimos (igual grado en numerador y denominador):

$$\frac{3x^2 + 4}{(x - 2)^2} = 3 + \frac{12x - 8}{(x - 2)^2}$$

Descomponemos $\frac{12x - 8}{(x - 2)^2}$ en fracciones parciales:

$$\frac{12x - 8}{(x - 2)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} \Rightarrow 12x - 8 = A(x - 2) + B$$

$$x = 2 : 16 = B \quad \text{Coef. } x : 12 = A$$

Integramos:

$$\int f(x) dx = \int \left(3 + \frac{12}{x - 2} + \frac{16}{(x - 2)^2} \right) dx = 3x + 12 \ln |x - 2| - \frac{16}{x - 2} + C$$

$$\checkmark \int f(x) dx = 3x + 12 \ln |x - 2| - \frac{16}{x - 2} + C$$

Apartado b)

Aplicamos $F(3) = 5$:

$$9 + 12 \ln 1 - 16 + C = 5 \Rightarrow -7 + C = 5 \Rightarrow C = 12$$

$$\checkmark F(x) = 3x + 12 \ln |x - 2| - \frac{16}{x - 2} + 12$$

$\Rightarrow$ **Error común:** No hacer la división previa antes de descomponer en fracciones parciales. El grado del numerador es 2 e igual al del denominador, por lo que hay que dividir primero.

Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a . **(1,25 puntos)**

b) Para $a = 0$, resuelve el sistema. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. **(1,25 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

$\det(A) = 0$ siempre (se puede comprobar que las filas son dependientes). El menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2.$$

Estudiamos $\operatorname{rg}(A^*)$ por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1; F_3 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & -3 & 0 & -a \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -4a \end{array} \right)$$

Si $a \neq 0$: $\operatorname{rg}(A) = 2$, $\operatorname{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$ **SI**.

Si $a = 0$: $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 2 < 3 \Rightarrow$ **SCI**.

Valor de a	Tipo de sistema
$a \neq 0$	SI
$a = 0$	SCI

Apartado b)

Para $a = 0$, de la matriz escalonada: $-y = 0 \Rightarrow y = 0$ y $x + z = 0 \Rightarrow x = -z = \lambda$

$$x = \lambda; y = 0; z = -\lambda$$

Para $y + z = 4$: $0 + (-\lambda) = 4 \Rightarrow \lambda = -4$

✓ **Solución general:** $x = \lambda$, $y = 0$, $z = -\lambda$. **Solución con $y + z = 4$:** $(-4, 0, 4)$.

$\Rightarrow$ **Error común:** No construir correctamente la fila escalonada para determinar si la última ecuación es $0 = 0$ (SCI) o $0 = -4a$ (SI).

Ejercicio 8 (2,5 puntos)

Se considera el punto $A(1, -2, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r . **(1,25 puntos)**

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r . **(1,25 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

Vector director de r :

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3 - 0)\vec{i} - (-3 - 0)\vec{j} + (1 - 0)\vec{k} = (-3, 3, 1)$$

El plano perpendicular a r tiene $\vec{v}_r$ como normal. Por $A(1, -2, 0)$:

$$-3(x - 1) + 3(y + 2) + 1(z - 0) = 0 \Rightarrow -3x + 3y + z + 9 = 0$$

✓ **Plano:** $-3x + 3y + z + 9 = 0$

Apartado b)

Tomamos un punto de r . Con $z = 0$: $y = -2$, $x = 2 \Rightarrow$ punto $R(2, -2, 0)$.

$\overrightarrow{AR} = (1, 0, 0)$ y $\vec{v}_r = (-3, 3, 1)$.

Normal al plano:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AR} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (0)\vec{i} - (1)\vec{j} + (3)\vec{k} = (0, -1, 3)$$

Ecuación por $A(1, -2, 0)$:

$$0(x - 1) - 1(y + 2) + 3(z - 0) = 0 \Rightarrow -y + 3z = 2$$

✓ **Plano:** $-y + 3z = 2$

$\Rightarrow$ **Error común:** En el apartado b), no buscar un punto de la recta r para construir el segundo vector del plano. Sin ese punto no podemos calcular el normal al plano que contiene a r .