
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Julio 2025 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 1 ejercicio obligatorio (Ej. 1) + 1 ejercicio de cada bloque optativo (Bloque 1: Ej. 2 ó 3 · Bloque 2: Ej. 4 ó 5 · Bloque 3: Ej. 6 ó 7). Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

BLOQUE OBLIGATORIO · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

Resolución

Llamamos x, y, z a los tres números naturales. Planteamos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 22 \\ 4x + 3y + 2z = 61 \end{array} \right\}$$

Multiplicamos la primera ecuación por -2 y sumamos:

$$\left. \begin{array}{l} -2x - 2y - 2z = -44 \\ 4x + 3y + 2z = 61 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + y = 17 \Rightarrow y = 17 - 2x$$

Y de la primera ecuación: $z = 22 - x - y = 22 - x - (17 - 2x) = 5 + x$

Tenemos la solución general:

$$x = x \quad ; \quad y = 17 - 2x \quad ; \quad z = 5 + x$$

Como son **números naturales** (≥ 1), imponemos: $y = 17 - 2x \geq 1 \Rightarrow x \leq 8$ y $x \geq 1$

Luego $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, lo que da **8 soluciones posibles**.

¿Puede ser 15 uno de los números?

Si $x = 15$: $y = 17 - 30 = -13 < 0$ No válido

Si $y = 15$: $17 - 2x = 15 \Rightarrow x = 1$; $z = 6$ ✓

Si $z = 15$: $5 + x = 15 \Rightarrow x = 10$; $y = 17 - 20 = -3 < 0$ No válido

✓ **Sí puede ser 15 uno de los números: la solución es $x = 1, y = 15, z = 6$. Existen otras 7 opciones con $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.**

⇒ **Error común:** Olvidar que los números deben ser **naturales** (≥ 1), lo que acota las soluciones. Sin esa condición el sistema tiene infinitas soluciones.

BLOQUE OPTATIVO 1 · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolución

Necesitamos calcular $F(x) = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$. Completamos el cuadrado en el denominador:

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

Entonces, usando la fórmula $\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + C$:

$$F(x) = \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx = \arctan(x + 1) + C$$

Aplicamos la condición $F(0) = \frac{\pi}{4}$:

$$\arctan(0 + 1) + C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow C = 0$$

$$\checkmark \quad F(x) = \arctan(x + 1)$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Intentar integrar directamente sin completar el cuadrado. La clave es reconocer la forma $\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + C$ tras el cambio de variable $u = x + 1$.

BLOQUE OPTATIVO 1 · Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Calcula el valor de k para que $\int_1^3 e^{x-k}(x-2) dx = 2$.

Resolución

Sacamos e^{-k} fuera de la integral, ya que es una constante respecto de x :

$$e^{-k} \int_1^3 e^x(x-2) dx = 2$$

Calculamos $\int e^x(x-2) dx$ por partes:

$$u = x - 2 ; du = dx \quad dv = e^x dx ; v = e^x$$

$$\int e^x(x-2) dx = e^x(x-2) - \int e^x dx = e^x(x-2) - e^x = e^x(x-3) + C$$

Evaluamos en $[1, 3]$:

$$[e^x(x-3)]_1^3 = e^3(3-3) - e^1(1-3) = 0 - e \cdot (-2) = 2e$$

Volvemos a la ecuación principal:

$$e^{-k} \cdot 2e = 2 \Rightarrow e^{1-k} = 1 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

✓ $k = 1$

⇒ **Error común:** Olvidar sacar e^{-k} como factor constante antes de integrar. También es frecuente cometer errores en la integración por partes: recuerda que la fórmula es $\int u dv = uv - \int v du$.

BLOQUE OPTATIVO 2 · Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx - y - 2z = 5$.

a) [1,5 puntos] Halla m para que r y π sean paralelos.

b) [1 punto] Para $m = -8$, calcula la distancia de la recta r al plano π .

Resolución

Apartado a)

Hallamos el vector director de r como producto vectorial de los normales a los planos que la definen: $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 2, -1)$:

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1-2)\vec{i} - (-1-1)\vec{j} + (2+1)\vec{k} = (-1, 2, 3)$$

El vector normal al plano π es $\vec{n}_\pi = (m, -1, -2)$.

Para que $r \parallel \pi$ se necesita $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$, es decir $\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$:

$$(-1)(m) + (2)(-1) + (3)(-2) = 0 \Rightarrow -m - 2 - 6 = 0 \Rightarrow m = -8$$

Verificamos que un punto de r no está en π . Con $z = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}; x = \frac{10}{3}$$

Comprobamos con $m = -8$: $(-8) \cdot \frac{10}{3} - \frac{1}{3} - 0 = -27 \neq 5$ ✓ La recta no está en el plano.

✓ $m = -8$

Apartado b)

Como $r \parallel \pi$, la distancia es la distancia del punto $(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ al plano $-8x - y - 2z - 5 = 0$:

$$d = \frac{\left| -8 \cdot \frac{10}{3} - \frac{1}{3} - 2 \cdot 0 - 5 \right|}{\sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\left| -\frac{80}{3} - \frac{1}{3} - 5 \right|}{\sqrt{64 + 1 + 4}} = \frac{|-27 - 5|}{\sqrt{69}} = \frac{32}{\sqrt{69}} = \frac{32\sqrt{69}}{69}$$

✓ $d = \frac{32\sqrt{69}}{69}$ unidades.

⇒ **Error común:** No verificar que la recta y el plano son realmente paralelos antes de calcular la distancia. Si la recta estuviera contenida en el plano, la distancia sería 0 y el método no sería válido.

BLOQUE OPTATIVO 2 · Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Sean las rectas $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$

a) [1 punto] Estudia la posición relativa de las rectas r y s .

b) [1,5 puntos] Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s .

Resolución**Apartado a)**

Vectores directores: $\vec{v}_r = (4, 3, -1)$, $\vec{v}_s = (-1, 1, -2)$.

Comprobamos si son proporcionales: $\frac{4}{-1} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow$ **no son paralelas**.

Tomamos un punto de cada recta: $P_r = (-1, -2, 2)$ y $P_s = (1, 2, -3)$.

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (2, 4, -5)$$

Calculamos el determinante para distinguir entre rectas que se cortan y rectas cruzadas:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-6 + 1) - 4(-8 - 1) + (-5)(4 + 3) = -10 + 36 - 35 = -9 \neq 0$$

Como el determinante es $\neq 0$: las rectas se **cruzan**.

✓ **Las rectas r y s se cruzan (no se cortan y no son paralelas).**

Apartado b)

El vector perpendicular a ambas rectas es $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$:

$$\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-6 + 1)\vec{i} - (-8 - 1)\vec{j} + (4 + 3)\vec{k} = (-5, 9, 7)$$

El plano buscado contiene a r (con dirección $\vec{v}_r = (4, 3, -1)$) y a la recta perpendicular (con dirección $\vec{w} = (-5, 9, 7)$). El vector normal al plano es:

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & 7 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(3 \cdot 7 - (-1) \cdot 9) - \vec{j}(4 \cdot 7 - (-1)(-5)) + \vec{k}(4 \cdot 9 - 3 \cdot (-5)) = (30, -23, 51) \end{aligned}$$

Ecuación del plano usando $P_r = (-1, -2, 2)$:

$$30(x + 1) - 23(y + 2) + 51(z - 2) = 0 \Rightarrow 30x - 23y + 51z - 118 = 0$$

✓ **Plano:** $30x - 23y + 51z - 118 = 0$.

⇒ **Error común:** En el apartado a), confundir rectas cruzadas con paralelas. Recuerda: paralelas ⇒ vectores directores proporcionales; cruzadas ⇒ no proporcionales **y** determinante $\neq 0$.

BLOQUE OPTATIVO 3 · Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = 1.$$

Resolución

Evaluamos en $x = 0$: numerador = 0, denominador = 0. Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) + ae^x + \cos(x)}{2bx + 1 - \cos(x)} = \frac{0 + 0 + a + 1}{0 + 1 - 1} = \frac{a + 1}{0}$$

Como el límite es finito, el numerador debe tender a 0: $a + 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{a = -1}$

Con $a = -1$ tenemos nueva indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital de nuevo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) - e^x + \cos(x)}{2bx + 1 - \cos(x)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \cos(x) - x \operatorname{sen}(x) - e^x - \operatorname{sen}(x)}{2b + \operatorname{sen}(x)} = \frac{1 + 1 - 0 - 1 - 0}{2b + 0} = \frac{1}{2b}$$

Iguálamos a 1:

$$\frac{1}{2b} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\checkmark \quad a = -1 \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Aplicar L'Hôpital sin comprobar que se tiene $\frac{0}{0}$ antes de cada aplicación. Aquí es necesario aplicarlo dos veces: la primera nos da la condición sobre a , y la segunda nos permite calcular b .

BLOQUE OPTATIVO 3 · Ejercicio 7 (2,5 puntos)

La velocidad máxima a la que puede circular un vehículo sobre un determinado puente del río Guadalete es de 70 km/h.

a) [1 punto] En uno de los sentidos de circulación, la velocidad de los vehículos sigue una distribución normal de media 64 km/h y desviación típica 4 km/h. Si el radar de control salta a partir de 72 km/h, ¿cuál es el porcentaje de vehículos que se sancionan?

b) [1,5 puntos] En el sentido contrario, también sigue una distribución normal de la que sabemos que la velocidad media es de 63,6 km/h y que el 5,05 % de todos los vehículos viaja a más de 80 km/h. En este caso, ¿cuánto vale la desviación típica?

Resolución**Apartado a)**

$X \sim \mathcal{N}(64, 4)$ con $\mu = 64$ y $\sigma = 4$. Tipificamos:

$$P(X > 72) = P\left(Z > \frac{72 - 64}{4}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

✓ Se sanciona aproximadamente el 2,28 % de los vehículos.

Apartado b)

$X \sim \mathcal{N}(63,6, \sigma)$. Sabemos que $P(X > 80) = 0,0505$, luego:

$$P(X \leq 80) = 1 - 0,0505 = 0,9495$$

Tipificamos e igualamos al valor de la tabla normal:

$$P\left(Z \leq \frac{80 - 63,6}{\sigma}\right) = 0,9495 \Rightarrow \frac{16,4}{\sigma} = 1,64 \Rightarrow \sigma = \frac{16,4}{1,64} = 10$$

✓ $\sigma = 10$ km/h

⇒ **Error común:** En el apartado a), calcular $P(X < 72)$ en lugar de $P(X > 72)$. El porcentaje sancionado es la probabilidad de **superar** el umbral del radar, es decir la cola derecha de la distribución.