
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Julio 2024 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 4 bloques (A, B, C, D) de 2 ejercicios cada uno. Se resuelve **un ejercicio por bloque**. Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

BLOQUE A · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = a + b \cos(x) + c \sin(x)$. Halla a , b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Resolución

Identificamos tres condiciones:

Condición 1 — La tangente en $x = \frac{\pi}{2}$ es horizontal ($y = 1$), luego $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$f'(x) = -b \sin(x) + c \cos(x) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b + 0 = 0 \Rightarrow b = 0$$

Condición 2 — El punto de tangencia pertenece a $y = 1$, luego $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$$a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow a + 0 + c = 1 \Rightarrow a + c = 1$$

Condición 3 — La recta $y = x - 1$ pasa por $(0, f(0))$, luego $f(0) = 0 - 1 = -1$:

$$a + b \cos(0) + c \sin(0) = -1 \Rightarrow a + b = -1$$

Con $b = 0$: $a = -1$. De $a + c = 1$: $c = 2$.

$$\checkmark \quad a = -1, \quad b = 0, \quad c = 2$$

$\Rightarrow$ **Error común:** La condición “la recta $y = 1$ es tangente en $x = \frac{\pi}{2}$ ” da **dos** condiciones: que $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (pendiente nula) y que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (el punto está en la recta). Olvidar una de ellas deja el sistema indeterminado.

BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

- a) [1,5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
 b) [1 punto] Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Resolución**Apartado a)**

Calculamos $f'(x)$ por la regla del producto:

$$f'(x) = e^{-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2} \left[1 - 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = e^{-x^2}(-2x^2 + x + 1)$$

Como $e^{-x^2} > 0$ siempre, el signo depende de $-2x^2 + x + 1$. Igualamos a cero:

$$-2x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow (2x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ o } x = 1$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

Intervalo	$-2x^2 + x + 1$	$f'(x)$	f
$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	−	−	Decreciente ↘
$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	+	+	Creciente ↗
$(1, +\infty)$	−	−	Decreciente ↘

✓ f crece en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ y decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y $(1, +\infty)$.

Apartado b)

En $x = -\frac{1}{2}$, f' cambia de − a +: **mínimo relativo**.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{-1/4} = -e^{-1/4}$$

En $x = 1$, f' cambia de + a −: **máximo relativo**.

$$f(1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-1} = \frac{1}{2e}$$

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, los extremos relativos son también **extremos absolutos**.

✓ **Mínimo absoluto:** $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -e^{-1/4}$ en $x = -\frac{1}{2}$. **Máximo absoluto:** $f(1) = \frac{1}{2e}$ en $x = 1$.

⇒ **Error común:** Olvidar analizar el comportamiento en $\pm\infty$ para confirmar que los extremos relativos son también absolutos. Como $e^{-x^2} \rightarrow 0$ más rápido que cualquier polinomio, $f(x) \rightarrow 0$ en los extremos, lo que confirma que los extremos relativos son globales.

BLOQUE B · Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

a) [1 punto] Halla los puntos de intersección de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

b) [1,5 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

Resolución**Apartado a)**

Estudiamos $g(x) = |x^2 - 1|$:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

Zona $|x| \geq 1$: $-x^2 + 7 = x^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$, con $y = 3$.

Zona $|x| < 1$: $-x^2 + 7 = 1 - x^2 \Rightarrow 7 = 1$ No hay intersección.

✓ **Puntos de intersección:** $(-2, 3)$ y $(2, 3)$.

Apartado b)

f está por encima de g en $[-2, 2]$. Por simetría calculamos el doble de la integral en $[0, 2]$, dividiendo en $[0, 1]$ (donde $g = 1 - x^2$) y $[1, 2]$ (donde $g = x^2 - 1$):

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \left[\int_0^1 (-x^2 + 7 - (1 - x^2)) dx + \int_1^2 (-x^2 + 7 - (x^2 - 1)) dx \right] \\ &= 2 \left[\int_0^1 6 dx + \int_1^2 (-2x^2 + 8) dx \right] = 2 \left[6 + \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_1^2 \right] \\ &= 2 \left[6 + \left(-\frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8 \right) \right] = 2 \left[6 + \frac{10}{3} \right] = 2 \cdot \frac{28}{3} = \frac{56}{3} \end{aligned}$$

✓ **Área** $= \frac{56}{3}$ unidades cuadradas.

⇒ **Error común:** No distinguir las dos zonas de $g(x) = |x^2 - 1|$ al integrar. Es imprescindible quitar el valor absoluto antes de calcular cada integral parcial.

BLOQUE B · Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Halla $\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx$.

Resolución

Calculamos $I = \int e^x \cos(x) dx$ por partes dos veces.

Primera integración por partes:

$$u = \cos(x) ; du = -\operatorname{sen}(x) dx \quad dv = e^x dx ; v = e^x$$

$$I = e^x \cos(x) + \int e^x \operatorname{sen}(x) dx$$

Segunda integración por partes sobre $\int e^x \operatorname{sen}(x) dx$:

$$u = \operatorname{sen}(x) ; du = \cos(x) dx \quad dv = e^x dx ; v = e^x$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \cos(x) dx = e^x \operatorname{sen}(x) - I$$

Sustituyendo y despejando I :

$$I = e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - I \Rightarrow 2I = e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) \Rightarrow I = \frac{e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x))}{2}$$

Evalúamos en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\left[\frac{e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x))}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{e^{\pi/2} (0 + 1)}{2} - \frac{e^0 (1 + 0)}{2} = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$$

$$\checkmark \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Tras la segunda integración por partes, no reconocer que I aparece en ambos lados y que se puede despejar algebraicamente. Hay que agrupar los dos I y **no** volver a integrar indefinidamente.

BLOQUE C · Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) [1,25 puntos] Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1 .

Resolución**Apartado a)**

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculamos XA y $-AX^t$:

$$XA = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \quad -AX^t = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix}$$

Igualando $XA = -AX^t$:

$$\left. \begin{array}{l} -a = a \Rightarrow a = 0 \\ b = c \\ d = -d \Rightarrow d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos $X^2 = I$:

$$X^2 = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = I \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$\checkmark \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bullet \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Apartado b)

Sea $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculamos YA y AY :

$$YA = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \quad AY = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Igualando $YA = AY$:

$$b = -b \Rightarrow b = 0 \quad ; \quad -c = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Condiciones adicionales:

$$\text{Traza nula: } a + d = 0 \Rightarrow d = -a \quad \text{Det} = -1 : ad = -a^2 = -1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\checkmark \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{○} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇒ **Error común:** En el apartado a), confundir X^t (transpuesta) con X^{-1} (inversa).
Transponer **intercambia filas y columnas**; son operaciones completamente distintas.

BLOQUE C · Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Un proveedor vende tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido: $20A + 30B + 15C = 2200$ €. En un segundo pedido: $15A + 10B + 10C = 1250$ €.

a) [1,25 puntos] ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 A, 10 B y 16 C?

b) [1,25 puntos] Si además el precio de C es $\frac{2}{5}$ del precio de A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Resolución**Apartado a)**

Buscamos α y β tales que el tercer pedido sea combinación lineal de los dos anteriores:

$$\alpha(20, 30, 15) + \beta(15, 10, 10) = (25, 10, 16) \Rightarrow \begin{cases} 20\alpha + 15\beta = 25 \\ 30\alpha + 10\beta = 10 \\ 15\alpha + 10\beta = 16 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} 40\alpha + 30\beta = 50 \\ 90\alpha + 30\beta = 30 \end{cases} \Rightarrow -50\alpha = 20 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{5} \Rightarrow \beta = \frac{11}{5}$$

Verificamos con la tercera: $15 \cdot (-\frac{2}{5}) + 10 \cdot (\frac{11}{5}) = -6 + 22 = 16$ ✓

El coste del tercer pedido:

$$\alpha \cdot 2200 + \beta \cdot 1250 = -\frac{2}{5} \cdot 2200 + \frac{11}{5} \cdot 1250 = -880 + 2750 = 1870 \text{ €}$$

✓ El pedido de 25 A + 10 B + 16 C cuesta 1870 €.

Apartado b)

Llamamos x, y, z a los precios de A, B, C. Añadimos $z = \frac{2}{5}x$, es decir $5z - 2x = 0$:

$$\begin{cases} 20x + 30y + 15z = 2200 \\ 15x + 10y + 10z = 1250 \\ -2x + 5z = 0 \end{cases}$$

De la tercera: $x = \frac{5z}{2}$. Sustituyendo en la segunda:

$$\frac{75z}{2} + 10y + 10z = 1250 \Rightarrow 10y + \frac{95z}{2} = 1250$$

Sustituyendo en la primera:

$$50z + 30y + 15z = 2200 \Rightarrow 30y + 65z = 2200$$

Del sistema en y y z :

$$\begin{cases} 20y + 95z = 2500 \\ 30y + 65z = 2200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60y + 285z = 7500 \\ 60y + 130z = 4400 \end{cases} \Rightarrow 155z = 3100 \Rightarrow z = 20$$

$$\text{Entonces: } x = \frac{5 \cdot 20}{2} = 50 \quad \text{y} \quad y = \frac{1250 - 950}{10} = 30$$

✓ Perfume A: 50€, Perfume B: 30€, Perfume C: 20€.

⇒ **Error común:** En el apartado a), intentar resolver el sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas para obtener precios individuales. El truco es expresar el tercer pedido como combinación lineal de los dos anteriores sin necesitar los precios por separado.

BLOQUE D · Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) [1 punto] Estudia la posición relativa de π y r .

b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

Resolución**Apartado a)**

Pasamos la recta r a implícitas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \quad \text{ya que} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$|M| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2 \quad \text{ya que} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 2 < 3$: la recta está **contenida** en el plano.

✓ **La recta r está contenida en el plano π .**

Apartado b)

Los planos perpendiculares a r tienen dirección $\vec{v}_r = (2, 1, 0)$, luego su forma es $2x + y + D = 0$. Calculamos el que pasa por $P(2, -1, -2)$:

$$2 \cdot 2 + (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$$

Calculamos el punto de corte M de la recta r con ese plano:

$$2(1 + 2\lambda) + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 5\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5} \Rightarrow M = \left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, 1\right)$$

El vector $\overrightarrow{PM} = \left(\frac{7}{5} - 2, \frac{1}{5} + 1, 1 + 2\right) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 3\right) \sim (-1, 2, 5)$

La recta buscada pasa por $P(2, -1, -2)$ con dirección $(-1, 2, 5)$:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{5}$$

✓ **Recta:** $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{5}$

⇒ **Error común:** En el apartado a), concluir que la recta es paralela al plano sin verificar si está contenida. Siempre hay que comparar $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(M)$.

BLOQUE D · Ejercicio 8 (2,5 puntos)

Considera los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B .

Resolución

Los puntos del plano OXZ tienen la forma $C = (x, 0, z)$. Para que ABC sea equilátero se necesita $|AB| = |AC| = |BC|$.

Calculamos $|AB|$:

$$|AB| = \sqrt{(4-0)^2 + (0-2)^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Condición $|AC|^2 = 20$:

$$(x-4)^2 + 0 + z^2 = 20$$

Condición $|BC|^2 = 20$:

$$x^2 + (0-2)^2 + z^2 = 20 \Rightarrow x^2 + z^2 = 16$$

Restando las dos ecuaciones:

$$(x-4)^2 - x^2 = 4 \Rightarrow -8x + 16 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Sustituyendo:

$$z^2 = 16 - \frac{9}{4} = \frac{55}{4} \Rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{55}}{2}$$

✓ Los puntos son $C = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$ y $C' = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$.

⇒ **Error común:** Olvidar que hay dos soluciones simétricas respecto al plano OXY (valores positivo y negativo de z). El plano OXZ no limita el signo de z .