
Matemáticas II

PAU Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos

Julio 2022 · Resolución completa

Resolución paso a paso con explicaciones didácticas · *estudiante.plus*

Estructura del examen: 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno. Se resuelven **4 ejercicios en total**, independientemente del bloque. Cada ejercicio vale **2,5 puntos**.

BLOQUE A · Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Calcula a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} = 1$.

Resolución

Es una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Dividimos numerador y denominador entre x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a}{x}}{\frac{(\ln x)^3}{x} + 2}$$

Calculamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$ aplicando L'Hôpital tres veces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(\ln x)^2}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \ln x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a}{x}}{\frac{(\ln x)^3}{x} + 2} = \frac{a}{0 + 2} = \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

✓ $a = 2$

$\Rightarrow$ **Error común:** Aplicar L'Hôpital directamente al límite original sin simplificar. Es más limpio dividir por x previamente y reconocer que $\frac{(\ln x)^3}{x} \rightarrow 0$.

BLOQUE A · Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, con su base sobre dicho eje.

Resolución

Cortes de f con el eje OX : $-x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$

Dimensiones del rectángulo (base $2x$, altura $f(x) = -x^2 + 12$):

$$A(x) = 2x(-x^2 + 12) = 24x - 2x^3 \quad ; \quad x \in (0, 2\sqrt{3})$$

Maximizamos:

$$A'(x) = 24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$A''(x) = -12x < 0 \quad \checkmark \quad (\text{máximo})$$

Altura: $f(2) = -4 + 12 = 8$. Vértices: $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 8)$, $(-2, 8)$.

Área máxima: $A(2) = 24(2) - 2(8) = 32$

✓ Vértices: $(\pm 2, 0)$ y $(\pm 2, 8)$. **Área máxima** = 32 u^2 .

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar que la base del rectángulo es $2x$ por la simetría de la parábola. Si solo se usa x como base se obtiene la mitad del área correcta.

BLOQUE A · Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Calcula $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx$.

Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+x} - 1$.

Resolución

Cambio de variable: $t = \sqrt{1+x} - 1 \Rightarrow \sqrt{1+x} = t + 1 \Rightarrow x = (t+1)^2 - 1 \Rightarrow dx = 2(t+1) dt$

Nuevos límites:

$$x = 3 : t = \sqrt{4} - 1 = 1 \quad x = 8 : t = \sqrt{9} - 1 = 2$$

Integral transformada:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot 2(t+1) dt &= \int_1^2 \frac{2(t+1)}{t} dt = \int_1^2 \left(2 + \frac{2}{t}\right) dt = [2t + 2 \ln t]_1^2 \\ &= (4 + 2 \ln 2) - (2 + 0) = 2 + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx = 2 + 2 \ln 2$$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar cambiar los límites de integración al hacer el cambio de variable. Los límites $x = 3$ y $x = 8$ deben transformarse a $t = 1$ y $t = 2$.

BLOQUE A · Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza sus gráficas. **(1,25 puntos)**

b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante. **(1,25 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

$$x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = 0 ; x = -2 ; x = 1$$

✓ **Puntos de corte:** $(-2, -6)$, $(0, 2)$ y $(1, 3)$.

Apartado b)

En el primer cuadrante el recinto está entre $x = 0$ y $x = 1$. Comprobamos en $x = 0,5$: $f(0,5) \approx 2,13$ y $g(0,5) = 2,75$, luego $g > f$ en $[0, 1]$.

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x + 2 - x^3 - 2) dx = \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = 1 - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

✓ **Área** = $\frac{5}{12}$ unidades cuadradas.

⇒ **Error común:** Calcular el área entre todos los puntos de corte sin restringir al primer cuadrante. El enunciado especifica $x \geq 0$, $y \geq 0$, así que el recinto es solo entre $x = 0$ y $x = 1$.

BLOQUE B · Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de a para los que B no tiene inversa. **(0,5 puntos)**

b) Para $a = 1$ calcula X tal que $AXB = C$, si es posible. **(2 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

La matriz B no tiene inversa si su determinante es cero:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 4a - 2a^2 - 2 = 0 \Rightarrow -2a^2 + 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

✓ B no tiene inversa para $a = 0$ y $a = 2$.

Apartado b)

Calculamos la matriz X :

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Calculamos la inversa de A y de B :

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{(B^{adj})^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X :

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

⇒ **Error común:** Despejar X multiplicando en el orden incorrecto. Al ser matrices, el orden importa: de $AXB = C$ se obtiene $X = A^{-1}CB^{-1}$, multiplicando por A^{-1} a la izquierda y por B^{-1} a la derecha.

BLOQUE B · Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ (1 punto)

b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$ (1,5 puntos)

Resolución**Apartado a)**

Partimos de $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$ y aplicamos propiedades de determinantes:

- Intercambiamos columnas 2 y 3 $\Rightarrow$ multiplica por -1 : valor $+2$
- Intercambiamos filas 2 y 3 $\Rightarrow$ multiplica por -1 : valor -2
- Multiplicamos fila 2 por 2 $\Rightarrow$ multiplica por 2: valor -4
- Multiplicamos fila 3 por -3 $\Rightarrow$ multiplica por -3 : valor $+12$

$$\checkmark \quad \begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 12$$

Apartado b)

Separamos la columna 2 en suma usando linealidad del determinante:

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} x & p & -2a \\ y & q & -2b \\ z & r & -2c \end{vmatrix}$$

Primer determinante: sacamos -2 de la columna 3:

$$-2 \begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix} = 0$$

(columnas 2 y 3 iguales $\Rightarrow \det = 0$)

Segundo determinante: sacamos -2 de la columna 3:

$$-3 \cdot (-2) \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}$$

Por la propiedad de la transpuesta: $\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}$

Intercambiamos fila 1 y fila 3 ($\times(-1)$):

$$= - \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

Luego el resultado es $6 \cdot 2 = 12$.

$$\checkmark \begin{vmatrix} x & a - 3p & -2a \\ y & b - 3q & -2b \\ z & c - 3r & -2c \end{vmatrix} = 12$$

$\Rightarrow$ **Error común:** No aplicar correctamente la linealidad del determinante respecto a las columnas. El determinante es lineal en cada columna por separado, lo que permite separar sumas de columnas en suma de determinantes.

BLOQUE B · Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x + 1 = y - a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

a) Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte. **(1,5 puntos)**

b) Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8, -7, 2)$ y que contiene a la recta s . **(1 punto)**

Resolución**Apartado a)**

r paramétrica: $x = -1 + t$, $y = a + t$, $z = -t$. Vector director $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$. Punto de r : $R(-1, a, 0)$.

Vector director $\vec{v}_s = (2, 0, -1)$. Punto de s : $S(5, -3, 2)$.

$$\overrightarrow{RS} = (6, -3 - a, 2)$$

Para que se corten, el determinante debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 - a & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -a & 3a \end{vmatrix} \dots$$

Desarrollando por la primera fila:

$$6(-1 - 0) - (-3 - a)(-1 + 2) + 2(0 - 2) = 0 \Rightarrow -6 + 3 + a - 4 = 0 \Rightarrow a = 7$$

Punto de corte con $a = 7$: de $y = -3$: $7 + t = -3 \Rightarrow t = -10$

$$x = -1 + (-10) = -11 ; y = -3 ; z = 10$$

Verificación en s : $-11 = 5 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = -8$; $z = 2 - (-8) = 10$ ✓

✓ $a = 7$. **Punto de corte:** $(-11, -3, 10)$.

Apartado b)

s pasa por $S(5, -3, 2)$ con $\vec{v}_s = (2, 0, -1)$. $\overrightarrow{SP} = (3, -4, 0)$.

$$\vec{n} = \vec{v}_s \times \overrightarrow{SP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-4)\vec{i} - 3\vec{j} + (-8)\vec{k} = (-4, -3, -8)$$

Ecuación del plano por $P(8, -7, 2)$:

$$-4(x - 8) - 3(y + 7) - 8(z - 2) = 0 \Rightarrow -4x - 3y - 8z + 27 = 0$$

✓ **Plano:** $4x + 3y + 8z = 27$

⇒ **Error común:** En el apartado a), olvidar verificar el punto de corte en la segunda recta. Siempre hay que comprobar que el punto pertenece a ambas rectas.

BLOQUE B · Ejercicio 8 (2,5 puntos)

Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

- a) Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r . **(0,75 puntos)**
b) Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π . **(1,75 puntos)**

Resolución**Apartado a)**

r paramétrica: $x = t$, $y = 3t$, $z = t + 1$. Sustituimos en π :

$$t + 3t - (t + 1) = 2 \Rightarrow 3t - 1 = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (1, 3, 2)$$

✓ **Punto de intersección:** $(1, 3, 2)$.

Apartado b)

La recta perpendicular a π por Q tiene dirección $\vec{n} = (1, 1, -1)$:

$$(x, y, z) = (2 + t, 6 + t, 3 - t)$$

Pie H sustituyendo en π :

$$(2 + t) + (6 + t) - (3 - t) = 2 \Rightarrow 3t + 5 = 2 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H = (1, 5, 4)$$

Simétrico $Q' = 2H - Q$:

$$Q' = (2 \cdot 1 - 2, 2 \cdot 5 - 6, 2 \cdot 4 - 3) = (0, 4, 5)$$

✓ $Q' = (0, 4, 5)$

$\Rightarrow$ **Error común:** Olvidar que el pie H es el punto medio entre Q y su simétrico Q' , luego $Q' = 2H - Q$. Este paso final es el que más se olvida.